
DUHAMEL
WAGNER
DIFFERENTIAL
UND INTEGRAL
RECHNUNG
1. 2.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-

RECHNUNG.

LEHRBUCH

DER

DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG

MIT

VIELEN ANALYTISCHEN UND GEOMETRISCHEN ANWENDUNGEN,

VON

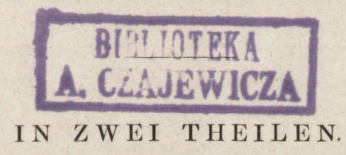
DUHAMEL,

Mitglied der Academie der Wissenschaften des Instituts von Frankreich.

DEUTSCH

VON

DR. WILHELM WAGNER.



IN ZWEI THEILEN.

ZWEITER THEIL.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1856.

Inhalt des zweiten Theils.

Verbesserungen.

Seite	3	Zeile	1	von	unten	$x_0 - x$ statt $x^0 - x$
„	8	„	15	„	„	der Form statt Form
„	38	„	11	„	„	u statt y
„	128	„	14	von	oben	$C_1 e^{-a}$ statt $C_1{}^{-a}$
„	160	„	8	„	„	dp statt dx

Von den Integralen der Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung.

1. Eine Differentialgleichung zwischen zwei Variablen x und y integriren, heisst alle Werthe von y als Functionen von x finden, welche ihr genügen; oder, mit anderen Worten, eine Gleichung zwischen x und y finden, welche eine Folge der vorgelegten, und von der umgekehrt diese eine Folge ist.

Aus dem geometrischen Gesichtspunkte betrachtet, heisst es alle Curven finden, deren Coordinaten mit ihren Differentialverhältnissen der verschiedenen Ordnungen dieser Gleichung genügen.

Betrachten wir die allgemeine Gleichung der $m$ten Ordnung, d. h. diejenige worin m der Index der höchsten in ihr vorkommenden Ableitung ist, mit welchen Potenzen übrigens diese Ableitungen auch behaftet seien. Es sei diese Gleichung

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0 .$$

Sie bestimmt $\frac{d^my}{dx^m}$ als Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, und wenn man sie wiederholt differentiirt, so bestimmen sich die Diffferentialverhältnisse $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}, \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}$ u. s. w. als Functionen derselben Grössen.

Im Allgemeinen lässt sich jede Function von x in eine Reihe entwickeln durch die Sätze von Taylor, Maclaurin, oder Bernoulli. Der erste ist den Ausnahmen weniger un-

terworfen, weil man den in die Coëfficienten eingehenden Werth von x so wählen kann, dass keiner von ihnen unendlich oder unbestimmt wird. In diesem Falle ist die Reihe nothwendig convergent für alle Werthe von x zwischen gewissen bestimmten Grenzen, und manchmal selbst für jeden Werth von x.

Es sei also y der allgemeinste Werth, welcher der Gleichung (1) genügt. Wenn man ihn als entwickelbar nach der Formel von Maclaurin voraussetzt, so hat man

$$(2)\quad \begin{cases} y = y_0 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 x + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \dfrac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots \\ \qquad + \left(\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0 \dfrac{x^{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)} + \cdots; \end{cases}$$

und wenn man nun alle Coëfficienten, von dem von x^m an, durch ihre, in der oben bemerkten Weise als Functionen der vorhergehenden bestimmten Werthe ersetzt, so wird die gesuchte Function nothwendig in denen enthalten sein, welche durch diese Entwicklung dargestellt werden, da man nur Bedingungen ausgedrückt hat, denen sie genügen soll. Und umgekehrt genügt die so bestimmte Function nothwendig der Differentialgleichung; denn, differentiirt man m mal die Gleichung (2), so erhält man genau die Entwicklung der in Bezug auf $\dfrac{d^m y}{dx^m}$ aufgelösten Gleichung (1).

Die Gleichung (2) würde daher die vollständige Lösung der Aufgabe geben, wenn alle Werthe von y auf diese Weise entwickelbar wären. Jedenfalls aber können nur diejenigen fehlen, für welche gewisse Differentialcoëfficienten aufhören endlich und bestimmt zu sein für den besonderen Werth $x = 0$.

2. Entwickelt man nach den Potenzen von $x - x_0$, so hat man

$$(3)\quad \begin{cases} y = y_0 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \cdots \\ \qquad + \left(\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0 \dfrac{(x-x_0)^{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)} + \cdots, \end{cases}$$

während die Coëfficienten von der Ordnung m an noch immer durch die Gleichung (1) bestimmt sind und sich auf $x = x_0$

beziehen; und umgekehrt würde die Gleichung (1) aus dieser durch m successive Differentiationen hervorgehen.

Den willkürlichen Werth x_0 könnte man so wählen, dass kein Coëfficient der Reihe unendlich oder unbestimmt würde, wenn diese Coëfficienten nur von x_0 abhingen; da sie aber noch den entsprechenden Werth von y und seinen Ableitungen enthalten, so kann es geschehen, dass eine Function $y = \varphi(x)$, welche der Differentialgleichung genügt, gewisse Coëfficienten der Entwicklung unendlich oder unbestimmt macht für jedes x_0. Wir werden bald ein Beispiel davon geben.

Man sieht hieraus dass die Formeln (2) und (3) nicht alle Functionen, welche der Gleichung (1) genügen, zu enthalten brauchen. Diese beiden Formeln fallen zusammen, wenn alle Auflösungen sowohl nach der einen als nach der anderen entwickelbar sind, weil sie dann identisch dieselben Functionen darstellen. Innerhalb solcher Grenzen, wo sie hinreichend convergiren, können sie dazu dienen, den Werth der gesuchten Function approximativ zu geben. Man giebt der Gleichung (3), von welcher die (2) nur ein besonderer, $x_0 = 0$ entsprechender Fall ist, den Namen allgemeines Integral der Gleichung (1).

Da die Gleichung (3) der vorgelegten Gleichung genügt, was auch die Werthe der m ersten Coëfficienten $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \cdots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$ seien, weil sie durch die m Differentiationen verschwinden, welche von der Gleichung (3) zu der vorgelegten führen: so sehen wir, dass das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der $m$ten Ordnung nothwendig m willkürliche Constanten enthält, welche die Werthe der Function und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen für einen beliebig genommenen Werth von x sind.

3. Man kann umgekehrt leicht beweisen, dass jede Gleichung zwischen x und y, welche der Differentialgleichung genügt und m willkürliche Constanten enthält, identisch ist mit dem durch die Entwicklung (3) dargestellten allgemeinen Integral. In der That, denkt man sich den durch diese Gleichung gegebenen Werth von y nach den Potenzen von $x^0 - x$

1*

entwickelt, so werden die m ersten Coëfficienten x_0 und die m willkürlichen Constanten enthalten und alle möglichen Werthe annehmen können, indem man diese Constanten entsprechend wählt, welchen Werth man auch x_0 giebt: sie können daher als vollkommen willkürlich betrachtet werden, und da die folgenden Coëfficienten von ihnen nach der Gleichung (1) abhängen, so wird die Entwicklung sich nicht von derjenigen unterscheiden, welche die Gleichung (3) giebt. Woraus der wichtige Lehrsatz folgt, dass jede Gleichung zwischen x und y, welche einer Differentialgleichung der $m$ten Ordnung genügt, das allgemeine Integral derselben ist, wenn sie nur m willkürliche Constanten enthält, vermöge deren es möglich ist, der Function und ihren $m-1$ ersten Ableitungen beliebige Werthe, für einen gewissen Werth von x, zu geben.

4. Diese letzte Bedingung ist unerlässlich, weil eine Gleichung m Constanten enthalten kann, welche sich durch Transformationen auf eine geringere Anzahl zurückführen lassen. Wenn man sich also versichern will, ob eine Gleichung das allgemeine Integral constituirt, so muss man sie $m-1$ mal differentiiren und untersuchen ob man den m Constanten solche Werthe geben kann, dass man für einen gegebenen Werth von x beliebige Werthe von y und seinen $m-1$ ersten Ableitungen erhält. Und hierzu ist es genügend, wenn die m Gleichungen sich nach den m Constanten auflösen lassen, ohne dass man auf eine Absurdität stösst: denn alsdann kann man, für irgend einen Werth von x, y und seine $m-1$ ersten Ableitungen beliebig wählen.

Hätte man z. B. gefunden, dass einer Gleichung zweiter Ordnung genügt wird durch den Werth

$$y = Ce^{ax} + C' e^{a'x},$$

während C und C' willkürliche Constanten sind, so würde hieraus folgen

$$\frac{dy}{dx} = aCe^{ax} + a'C' e^{a'x};$$

welchen endlichen Werth man nun auch x geben mag, so liefern diese zwei Gleichungen endliche Werthe für C und C', wenn nicht $a = a'$. Woraus folgt, dass wenn a' ver-

schieden von a, der gefundene Werth von y das allgemeine Integral ist.

Hätte man eine Auflösung gefunden von der Form

$$y = C \sin a x + C' \cos a x,$$

so würde folgen

$$\frac{dy}{dx} = a C \cos a x - a C' \sin a x,$$

woraus man endliche Werthe für C und C' zieht, wenn a nicht Null ist; der Werth von y wäre also noch das allgemeine Integral.

Ebenso ist es für einen Ausdruck von der Form

$$y = C \sin (x + a) + C' \sin (x + a');$$

differentiirt man denselben, und nimmt der Einfachheit wegen $x_0 = 0$, so findet man

$$y_0 = C \sin a + C' \sin a',$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = C \cos a + C' \cos a',$$

und hieraus zieht man endliche Werthe für C und C', wenn nicht

$$\sin a \cos a' - \sin a' \cos a = 0$$

oder

$$a' = a \pm n\pi,$$

während n eine ganze Zahl ist. Der Werth von y ist also das allgemeine Integral, ausgenommen diesen besonderen Fall.

Wenn man aber als Auflösung einer Gleichung der dritten Ordnung fände

$$y = C \sin (x + a) + C' \sin (x + a') + C'' \sin (x + a''),$$

so würde man erhalten, indem man zweimal differentiirte und nachher $x = 0$ setzte,

$$y_0 = C \sin a + C' \sin a' + C'' \sin a'',$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = C \cos a + C' \cos a' + C'' \cos a'',$$

$$-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = C \sin a + C' \sin a' + C'' \sin a''.$$

Nun sind die erste und die dritte dieser letzten Gleichungen unvereinbar, wenn man y_0 und $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$ unabhängig von einander lässt; man sieht also, dass es unmöglich ist die drei Con-

stanten so zu bestimmen, dass y und seine zwei ersten Ableitungen beliebige Werthe annehmen für $x = 0$: der Werth von y ist daher nicht das allgemeine Integral, und man sieht in diesem Beispiele leicht dass die Constanten auf zwei zurückgeführt werden können; denn, indem man die Sinus entwickelt, findet man

$$y = (C \cos a + C' \cos a' + C'' \cos a'') \sin x$$
$$+ (C \sin a + C' \sin a' + C'' \sin a'') \cos x,$$

und der Werth von y enthält wirklich nur zwei willkürliche Constanten, nämlich die Coëfficienten von $\sin x$ und $\cos x$.

5. Wenn man in dem allgemeinen Integrale einer Gleichung einer oder mehreren der willkürlichen Constanten, welche es enthält, besondere Werthe giebt, so wird diese Auflösung ein particuläres Integral genannt.

Wenn man einer Differentialgleichung durch eine Gleichung genügt, welche nicht in dem allgemeinen Integrale enthalten ist, so nennt man diese Gleichung eine singuläre Auflösung oder ein singuläres Integral.

In diesem Falle müssen, wie wir schon bemerkt haben, Coëfficienten der Entwicklung (3) unendlich oder unbestimmt werden, was auch x_0 sei, und folglich dann, wenn man dafür die Variable x setzt. Und da diese Coëfficienten nur Ableitungen von niedrigerer Ordnung als m enthalten, so geht hieraus hervor, dass der Werth $y = \varphi(x)$, welcher eine singuläre Auflösung einer Differentialgleichung der $m$ten Ordnung constituirt, zu gleicher Zeit dieser Gleichung und einer anderen Differentialgleichung von einer niedrigeren Ordnung genügen muss, in welcher keine willkürliche Constante vorkommt.

Wenn z. B. die vorgelegte Gleichung von der ersten Ordnung ist, so können die singulären Auflösungen nur gegeben werden durch Gleichungen zwischen x und y ohne willkürliche Constante; und folglich kann eine Auflösung mit einer willkürlichen Constante nur das allgemeine Integral sein.

Wenn aber die vorgelegte Gleichung von einer höheren als der ersten Ordnung wäre, so würde die singuläre Auflösung im Allgemeinen gegeben werden durch eine Differentialgleichung von einer um eine Einheit niedrigeren Ordnung, welche ein Integral mit willkürlichen Constanten haben würde. Man sieht also, dass die singulären Auflösungen der Dif-

ferentialgleichungen $m$ter Ordnung gegeben werden können durch Gleichungen zwischen x, y und höchstens $m-1$ Constanten. Man kann daher aus der Gegenwart willkürlicher Constanten nicht immer schliessen, dass eine Auflösung ein particuläres und kein singuläres Integral sei.

6. Wir wollen jetzt ein Beispiel des in Nr. 2 angekündigten Falles geben. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + (y-x)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.$$

Man zieht aus ihr durch wiederholte Differentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)}{(y-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{9}(y-x)^{-1},$$

und man findet, indem man die Formel (2) anwendet,

$$y = y_0 + x\left(1 - y_0^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{x^2}{2.3}\, y_0^{-\frac{1}{3}} + \frac{x^3}{2.3.9}\, y_0^{-1} + \cdots$$

Man erkennt leicht, dass indem man

$$\frac{2}{3}\, y_0^{\frac{2}{3}} = c$$

setzt, diese Gleichung sich auf

$$(a) \qquad y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (c-x)^{\frac{3}{2}}$$

reducirt. Man findet diesen Werth direct, indem man in der vorgelegten Gleichung $y - x = z$ setzt, was sie auf

$$\frac{dz}{dx} + z^{\frac{1}{3}} = 0$$

reducirt, woraus

$$z^{-\frac{1}{3}}\, dz = -\, dx;$$

durch Integriren und Hinzufügen einer willkürlichen Constante erhält man

$$\frac{3}{2}\, z^{\frac{2}{3}} = c - x,$$

daher

$$z = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (c-x)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{oder} \quad y = x + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (c-x)^{\frac{3}{2}}.$$

Diese Gleichung wird identisch dieselben Auflösungen wie die vorgelegte geben, wenn es erlaubt war durch $z^{\frac{1}{3}}$ zu dividiren, welches verlangt, dass z oder $y - x$ nicht Null sei. Kann daher $y - x = 0$ der vorgelegten nicht genügen, so giebt die Gleichung (a) alle ihre Auflösungen; aber wenn $y - x = 0$ ihr genügte, so wäre dies eine Auflösung, welche in der Gleichung (a) nicht enthalten zu sein braucht. Und in der That, $y - x = 0$ genügt dieser letzten nicht, welchen Werth man auch der willkürlichen Constante geben mag, und genügt doch der vorgelegten. Also ist $y - x = 0$ eine singuläre Auflösung.

Da diese Auflösung in dem allgemeinen Integrale nicht enthalten ist, so wollen wir sehen, was aus den Coëfficienten der durch die Formel (3) gegebenen, allgemeinsten Entwicklung von y wird.

Es ist evident, dass wenn man $y = x$ macht, alle Differentialcoëfficienten, von $\frac{d^2y}{dx^2}$ an, unendlich werden; und hätte man nicht den gemeinschaftlichen Factor $(y - x)^{\frac{1}{3}}$ in den beiden Gliedern des Werthes von $\frac{d^2y}{dx^2}$ unterdrückt, so würde dieser sich unter Form $\frac{0}{0}$ darbieten.

Dieses Beispiel zeigt einen Werth von y, nämlich den Werth x, welcher der vorgelegten Differentialgleichung genügt und nach den Potenzen von x entwickelbar ist, aber keine mögliche Entwicklung giebt, wenn man von jener ausgeht. Man darf also nicht behaupten, dass das sogenannte allgemeine Integral alle Auflösungen der vorgelegten Gleichung enthalte, oder mit anderen Worten, es kann singuläre Auflösungen geben.

7. Kann man eine der durch die Differentiation der vorgelegten erhaltenen Gleichungen in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine von niedrigerer Ordnung ist als der andere, und setzt man den von der niedrigeren Ordnung ebenfalls gleich Null, so hat man eine Gleichung mehr zwischen den schon betrachteten Ableitungen; es giebt dann eine Willkür-

liche weniger in der Entwicklung von y, und im Allgemeinen wird diese Entwicklung nicht in der anderen enthalten sein, die m willkürliche Constanten enthält.

Betrachten wir z. B. die Gleichung

$$(b) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\,\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Man findet, differentiirend,

$$\left(2\,\frac{dy}{dx} + x\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Indem man den Factor der zweiten Ordnung betrachtet, hat man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \cdots;$$

die Gleichung (b) giebt jetzt, durch die Entwicklung von Maclaurin,

$$y = y_0 + x\sqrt{y_0}.$$

Betrachtet man darauf den Factor erster Ordnung, so findet man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0, \cdots.$$

Wir haben jetzt zwei Gleichungen zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, y_0 ist also nicht mehr willkürlich, und man findet für $x = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Daher hat man für y den folgenden Werth ohne willkürliche Constante

$$y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2},$$

welcher in dem Integral mit einer willkürlichen Constante nicht enthalten, also eine singuläre Auflösung ist.

Von den Differentialgleichungen einer Gleichung mit zwei Variablen.

8. Betrachtet man eine Gleichung mit zwei Variablen $F(x, y) = 0$, und leitet man aus ihr auf irgend eine Weise

eine andere Gleichung ab, welche x, y und Ableitungen von y nach x enthält, so nennt man diese letzte eine Differentialgleichung der ersten. Sie ist eine Folge dieser Gleichung, aber diese ist nicht immer eine nothwendige Folge von ihr. So haben wir gesehen, dass eine Function von x nur eine Ableitung hat; während eine Ableitung unendlich vielen Integralen entspricht, die sich durch den Werth einer Constante unterscheiden.

Wenn man zwischen der ursprünglichen Gleichung und derjenigen, welche man erhält, indem man sie einmal differentiirt, eine Constante a eliminirt, so hat man eine gewisse Differentialgleichung erster Ordnung der vorgelegten Gleichung. Und allgemein, wenn man die vorgelegte $m$mal differentiirt, so kann man m beliebige der in ihr vorkommenden Constanten eliminiren, und man erhält auf diese Weise eine Differentialgleichung $m$ter Ordnung der primitiven Gleichung, welche m Constanten weniger enthält als diese. Eine verschiedene Differentialgleichung derselben Ordnung würde man erhalten, wenn man m andere Constanten zwischen denselben Gleichungen eliminirte.

Bemerken wir, dass man jede Differentialgleichung als auf diese Weise erhalten betrachten kann; denn wir haben bewiesen, dass ihr allgemeines Integral, wenn sie von der Ordnung m ist, m willkürliche Constanten enthält, welche nicht in der Differentialgleichung vorkommen. Also konnte diese letzte aus dem allgemeinen Integral nur abgeleitet werden, indem man diese Constanten zwischen dem Integral und den durch m successive Differentiationen daraus gezogenen Gleichungen eliminirte.

Diese Differentiationen können aber auf sehr verschiedene Weisen gemacht werden:

Will man z. B. nur eine Constante eliminiren, so kann man die Gleichung zuvor in verschiedene Formen bringen und dann differentiiren; man erhält so verschiedene Gleichungen erster Ordnung, und man kann die Constante zwischen irgend einer von ihnen und der vorgelegten Gleichung eliminiren.

Will man zwei Constanten eliminiren, so kann man die in eine willkürliche Form gebrachte Gleichung zweimal differentiiren; man hat dann drei Gleichungen, welche die zwei zu eliminirenden Grössen enthalten. Oder man kann auch

zunächst eine von ihnen zwischen der vorgelegten Gleichung und der aus ihr abgeleiteten der ersten Ordnung eliminiren; darauf kann man, indem man die so erhaltene Gleichung wie die vorgelegte behandelt, die zweite Constante eliminiren.

Die Combinationen würden sich vervielfältigen, wenn man eine grössere Anzahl von Constanten zu eliminiren hätte. Wir wollen nun beweisen, dass man immer, auf welche Weise die Elimination auch gemacht wird, dieselbe Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ u. s. w. und den nicht eliminirten Constanten erhält.

Nehmen wir an, dass man zu zwei verschiednen Gleichungen gelange, indem man dieselben m Constanten eliminirt; und es seien diese beiden Gleichungen, in Bezug auf $\frac{d^m y}{dx^m}$ aufgelöst,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right),$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right).$$

Nach dem was bewiesen worden ist, wird man, wenn man aus der einen und anderen eine Gleichung zwischen x, y und m willkürlichen Constanten herleitet, die Gleichung selbst erhalten, aus welcher sie gezogen sind, und folglich identische Resultate haben. Entwickelt man diese nach den Potenzen von $x - x_0$, so werden die Coëfficienten der verschiednen Potenzen respective gleich sein, wenn die, demselben Werthe x_0 entsprechenden Constanten y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0$ beiderseits dieselben sind.

Nun haben die Entwicklungen respective zu Coëfficienten von $\frac{(x - x_0)^m}{1.2 \ldots m}$ die beiden Ausdrücke

$$F\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0\right],$$

$$f\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0\right].$$

Es müssen daher diese beiden Functionen für jedes x_0 gleich sein, indem man den Grössen y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, ..., $\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$ und den nicht eliminirten Constanten, welche beiderseits dieselben sind, beliebige Werthe giebt; folglich müssen alle diese verschiedenen Grössen auf identische Weise in F und f vorkommen. Sie kommen aber darin auf dieselbe Weise vor, wie $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots,$ $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ und die nicht eliminirten Constanten in den beiden Ausdrücken für $\frac{d^m y}{dx^m}$ vorkommen; daher sind diese beiden Ausdrücke identisch, und die beiden Differentialgleichungen, mag man sie nun in Bezug auf $\frac{d^m y}{dx^m}$ auflösen oder nicht, sind es folglich auch; woraus der wichtige Lehrsatz hervorgeht:

Auf welche Weise man zu einer Differentialgleichung der $m$ten Ordnung kommen mag, wenn man von einer und derselben Gleichung zwischen x und y ausgeht und dieselben m Constanten eliminirt: immer erhält man eine und dieselbe Gleichung.

9. Dieser Satz giebt Veranlassung zu mehreren nützlichen Bemerkungen.

Heben wir unter allen Arten diese Rechnung auszuführen die folgende hervor:

Man eliminire zunächst eine der Constanten zwischen der vorgelegten Gleichung und ihrer ersten Ableitung; darauf eliminire man eine zweite Constante zwischen der so erhaltenen Gleichung und ihrer Ableitung; dann eine dritte Constante zwischen der so erhaltenen neuen Gleichung und ihrer Ableitung, und so fort bis die m bezeichneten Constanten verschwunden sind. Man hat dann die gesuchte Gleichung der $m$ten Ordnung; und nach unserm Lehrsatze ist diese Gleichung und sind alle Zwischengleichungen identisch mit denjenigen, welche man, dieselben Constanten eliminirend, durch andere Verfahrungsarten erhalten würde. Die Ordnung aber, in welcher man die m Constanten eliminirt, bestimmt die Zwischengleichungen; und so viel Combinationen als man zu n

mit m Buchstaben machen kann, eben so viel verschiedne Gleichungen der Ordunng n kann man erhalten, von denen jede nur eine einzige Form haben kann. Hieraus zieht man die wichtige Folgerung:

Jede Differentialgleichung von der Ordnung m kann abgeleitet werden aus m verschiedenen Gleichungen von der Ordnung $m - 1$, von welchen jede eine willkürliche Constante enthält; aus $\frac{m(m-1)}{1.2}$ Gleichungen von der Ordnung $m - 2$, welche deren zwei enthalten; und allgemein aus $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots\dots n}$ von der Ordnung $m - n$, von denen jede n willkürliche Constanten enthält.

10. Wenn man eine Gleichung $m$ter Ordnung zu integriren hat, so kann man ihre m ersten Integrale suchen. Gelingt es diese zu bestimmen, so hat man m Gleichungen zwischen $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, von welchen jede eine willkürliche Constante enthält; und indem man die $m - 1$ Ableitungen von x eliminirt, erhält man folglich eine Gleichung zwischen x, y und m willkürlichen Constanten. Man hat also dann das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

11. Manchmal ist es leichter die ersten Integrale der Gleichung $(m + 1)$ter Ordnung zu finden, welche man erhält, indem man die vorgelegte differentiirt. Das allgemeine Integral dieser Gleichung von der $(m + 1)$ten Ordnung ist dann das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung, wenn man sich zu einem Glied derselben eine willkürliche Constante addirt denkt; und kennt man das allgemeine Integral der Gleichung $(m + 1)$ter Ordnung, so hat man dasjenige der vorgelegten, indem man diese Constante gleich Null macht. Mau wird daher die $m + 1$ ersten Integrale suchen, zwischen ihnen die m Ableitungen von y eliminiren und dann statt der in Rede stehenden Constante Null setzen. Aber eines dieser ersten Integrale ist nichts Anderes als die um diese Constante vermehrte vorgelegte Gleichung, und reducirt sich folglich auf letztere, indem man für die Constante Null setzt; wenn man also m erste Integrale der Gleichung $(m + 1)$ter Ordnung

erhalten kann, welche die vorgelegte Gleichung nicht einschliessen, so braucht man nur zwischen ihr und den m Integralen die m Ableitungen von y zu eliminiren, und man hat das verlangte allgemeine Integral.

Hat man das allgemeine Integral der Gleichung $(m+1)$ter Ordnung durch irgend ein Mittel gefunden, so enthält dasselbe $m+1$ willkürliche Constanten; aber diese Constanten sind unter sich durch eine Gleichung verbunden, welche man erhält, indem man den gefundenen Werth von y in der vorgelegten Gleichung substituirt. Man hat also nur m willkürliche Constanten, wie es sein muss.

Anderes Mittel um die Integrale der Differentialgleichungen zu bestimmen.

12. Anstatt die Differentialgleichung zur Bestimmung der Coëfficienten der Entwicklung des Integrals zu gebrauchen, kann man sie anwenden um die successiven Incremente des Werthes von y und somit diesen Werth selbst, mit einer beliebigen Annäherung zu berechnen. Man erhält auf diese Weise nicht den Ausdruck von y durch x, aber so viel besondere Werthe als man will; mit anderen Worten, man kann von der Curve, deren Gleichung gesucht wird, so viel Punkte als man will, approximativ bestimmen.

Betrachten wir zunächst die Gleichung der ersten Ordnung, welche man immer als in die Form

$$dy = F(x, y)\, dx$$

gebracht annehmen kann.

Wenn man nach Belieben den Werth y_0 annimmt, welcher einem willkürlichen x_0 entspricht, so liefert die Gleichung das Increment, welches y erhält, wenn x in $x_0 + \alpha$ übergeht; der Werth desselben ist $dy_0 = F(x_0, y_0)\,\alpha$, indem man die Grössen vernachlässigt, welche in Bezug auf α von der zweiten Ordnung sind. Bezeichnet man die neuen Werthe von x und y durch x', y', so hat das einem Increment α von x' entsprechende Increment von y' den Werth

$$dy' = F(x', y')\,\alpha,$$

indem man wieder die Grössen von zweiter Ordnung in Bezug auf α vernachlässigt, sowie den noch kleineren Fehler, der davon

herrührt, dass man in dem Werthe von y eine Grösse zweiter Ordnung vernachlässigt hat. Indem man so fortfährt, und immer die Grössen von zweiter Ordnung in Bezug auf α vernachlässigt, erhält man so viel Werthe von y als man will, oder so viel Punkte als man will von der Curve, welche der Differentialgleichung genügt, und durch den willkürlichen Punkt geht, dessen Coordinaten x_0, y_0 sind. Man sieht hieraus dass eine Gleichung erster Ordnung unendlich viele Integrale hat, welche sich von einander nur durch den Werth einer Constante unterscheiden, die das einem willkürlich gewählten Werthe von x entsprechende y ist. Der aus diesen Rechnungen resultirende allgemeine Ausdruck von y ist

$$y = y_0 + F(x_0, y_0)\alpha + F[x_0 + \alpha, y_0 + F(x_0, y_0)\alpha]\alpha + \cdots,$$

worin die Zahl der zu nehmenden Glieder abhängt von dem Werthe von x, den man betrachtet; und man würde den Werth von y genau durch x ausgedrückt haben, wenn man die Grenze finden könnte, gegen welche die Summe von $n+1$ Gliedern dieser Reihe convergirt, während $n\alpha = x - x_0$ und α unbegrenzt abnimmt.

13. Bemerken wir dass diese Art die verschiedenen Integrale einer Differentialgleichung zu bestimmen, auf alle Auflösungen anwendbar ist. Sowohl die singulären als die particulären Integrale finden sich darin enthalten; was bei den anderen Methoden nicht der Fall ist.

Auf ähnliche Art kann man verfahren, wenn eine Gleichung zweiter Ordnung zu integriren ist. Diese kann man sich immer in der Form denken

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \text{ oder } d\,\frac{dy}{dx} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx.$$

Man nimmt die x_0 entsprechenden Werthe y_0, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ willkürlich an, und die Gleichung liefert das zu dem Increment α von x gehörige Increment von $\frac{dy}{dx}$. Man hat dann den Werth von $\frac{dy}{dx}$, welcher $x_0 + \alpha$ entspricht; ferner ist das Increment von y bekannt, da man $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ angenommen hat. Man kennt also für den Werth $x_0 + \alpha$ die Werthe von y und

$\frac{dy}{dx}$, und dieselbe Operation kann man beliebig oft wiederholen. Es zeigt sich hier, dass in dem Integrale einer Gleichung zweiter Ordnung zwei willkürliche Constanten vorkommen. Dieses Verfahren liefert nur die Werthe der Integrale approximativ; genau würde man sie finden, indem man die Grenze der Reihe bestimmte, während α gegen Null convergirt und wie im vorigen Falle $n\alpha = x - x_0$.

Offenbar finden dieselben Betrachtungen Anwendung auf die Gleichungen aller Ordnungen.

Differentialgleichungen der ersten Ordnung.

Singuläre Integrale der Gleichungen erster Ordnung.

14. Es sei

(1) $$F(x, y, a) = 0$$

das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung, und a sei die willkürliche Constante, deren Elimination zwischen der Gleichung (1) und ihrer Ableitung

(2) $$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

zu der vorgelegten Differentialgleichung führt. Man will wissen, ob diese letzte Auflösungen zulässt, welche nicht in dem allgemeinen Integrale enthalten sind.

Jede Gleichung zwischen x und y lässt sich in die Form bringen

(3) $$F(x, y, \varphi) = 0,$$

wo φ eine gewisse Function von x und y ist und F dieselbe Function bezeichnet wie in (1), nur dass die Constante a durch die Function φ ersetzt ist. Denn man kann $F(x, y, \varphi)$ irgend einer Function gleichsetzen und daraus für φ einen Werth ziehen, der diese Gleichung identisch macht. Die Gleichung (3) kann deshalb alle Auflösungen der vorgelegten Gleichung darstellen, wenn man für φ alle schicklichen Werthe setzt; und diese wollen wir nun zu bestimmen suchen.

Durch Differentiiren von (3) findet man, indem $\frac{d\varphi}{dx}$ die totale Ableitung von φ bezeichnet,

$$(4) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 0\,.$$

Wenn man in diese Gleichung den aus (3) resultirenden Werth von φ einsetzt, so hat dies in den beiden ersten Termen von (4) denselben Erfolg, als wenn man a aus (1) zieht und in (2) einsetzt. Folglich ist es zur Identität der Werthe von $\frac{dy}{dx}$ nothwendig und hinreichend, dass die Substitution von φ ergiebt

$$(5) \qquad \frac{\frac{dF}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = 0;$$

was auf mehrere Weisen geschehen kann:

1. Indem man $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ setzt, wo dann φ eine Constante ist, und die Gleichung (3) mit dem allgemeinen Integral zusammenfällt;

2. indem man $\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}}$ nach Substitution des aus (3) gezogenen Werthes von φ gleich Null setzt, was dasselbe ist, als wenn man φ durch die Gleichung $\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}} = 0$ bestimmt und den Werth in (3) einsetzt.

Man sieht also, dass wenn man das allgemeine Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung hat, man alle singulären Integrale erhalten wird, indem man die Constante eliminirt zwischen der Integralgleichung und ihrer gleich Null gesetzten partiellen Ableitung nach der Constante, sowie ihrer gleich Unendlich gesetzten partiellen Ableitung nach y. Man muss sich aber überzeugen, ob jede dieser Hypothesen auch wirklich das erste Glied der Gleichung (5) auf Null und nicht auf $\frac{0}{0}$ bringt.

Ferner muss man untersuchen, ob die so erhaltenen Auflösungen schon in dem allgemeinen Integrale stecken. In diesem besonderen Falle hat man ein particuläres Integral statt eines singulären.

15. Welche Form man der Gleichung (1) geben mag, die Anwendung der vorhergehenden Regeln muss immer zu denselben Auflösungen führen. Dies kann man verificiren, indem man bemerkt, dass das Verhältniss der beiden partiellen Ableitungen $\frac{dF}{d\varphi}$, $\frac{dF}{dy}$ mit Rücksicht auf $F = 0$ immer dasselbe sein wird, obgleich eine jede dieser beiden Ableitungen sich ändert, wenn man die Gleichung $F = 0$ transformirt. Denn hat man irgend eine Gleichung $F(x, y, z, u) = 0$, so drückt das Verhältniss von zwei partiellen Ableitungen des ersten Gliedes in Bezug auf zwei der Variablen, z. B. u und z, bis auf das Zeichen immer die Ableitung einer der Variablen u und z in Bezug auf die andere aus; es kann folglich, nach Elimination einer von beiden, nicht von der Form abhängen, unter welcher man die u und z verbindende Gleichung darstellt.

Wenn daher eine Transformation der Gleichung (1) macht, dass die Gleichung $\frac{dF}{d\varphi} = 0$ Auflösungen verliert, so macht sie zugleich, dass die Gleichung $\frac{1}{\frac{dF}{dy}} = 0$ dieselben gewinnt.

16. Das singuläre Integral hat eine sehr merkwürdige geometrische Beziehung zu dem allgemeinen Integral. In der That, wenn man a zwischen der Gleichung (1) und ihrer partiellen Ableitung nach a eliminirt, so hat man die Gleichung des Orts der successiven Durchschnitte der Curven, welche man erhält, indem man a in der Gleichung (1) stetig variirt. Also stellt das singuläre Integral die umhüllende Curve dieser Curven (der particulären Integrale) dar.

Wenn man nach der Differentialgleichung den geometrischen Ort von irgend einem ihrer Integrale, wie wir dies oben angegeben haben, construirt und zur Ordinate y_0 diejenige der umhüllenden Curve wählt, welche der Abscisse x_0 entspricht, so muss die Gleichung zwei allgemeine Werthe für

$\frac{dy}{dx}$ liefern, von denen der eine der Umhüllenden, der andere der Umhüllten entspricht, und welche gleich sind für den diesen beiden Curven gemeinsamen Punkt. Die angegebene Construction wird dann die beiden Curven liefern. Es giebt jedoch eine bemerkenswerthe Ausnahme von diesem Satze: sie findet statt, wenn die das singuläre Integral darstellende Umhüllungslinie eine Gerade ist.

In der That, wenn man von einem Punkte dieser Gerade ausgeht, so sind zwei Werthe von $\frac{dy}{dx}$ in diesem Punkte gleich, und folglich sind die zwei correspondirenden Werthe von dy, welche die Gleichung liefert, gleich, wie dies im Allgemeinen stattfindet; aber im gegenwärtigen Falle ist einer dieser Werthe strenge richtig, und zwar derjenige, welcher der geraden Linie entspricht, deren Gleichung ersten Grades, ohne etwas zu vernachlässigen, $dy = p\,dx$ giebt, wogegen man in jedem anderen Falle eine in Bezug auf dy unendlich kleine Grösse vernachlässigt. Hieraus folgt, dass der Nachbarpunkt strenge der Umhüllenden angehört, und man befindet sich also in demselben Falle wie vorher. Man sieht somit, dass die Differentialgleichung in diesem Falle das singuläre Integral allein giebt. Es ist zugleich klar, dass dies nur in diesem einzigen Falle geschieht. Denn läge der zweite Punkt nicht genau in der Enveloppe, so würde die Gleichung nicht zwei genau gleiche Werthe für $\frac{dy}{dx}$ geben, indem man die Coordinaten dieses Punktes substituirt; man würde also bei dem folgenden Werthe von x zwei Punkte statt eines finden und die beiden Linien erhalten.

Man kann die singulären Integrale auch aus der Differentialgleichung selbst bestimmen. Es sei diese Gleichung

(6) $$f(x, y, y') = 0,$$

indem wir $\frac{dy}{dx}$ durch y' bezeichnen.

Da die geometrische Darstellung der singulären Auflösung die umhüllende Curve von denjenigen ist, welche die particu-

lären Integrale darstellen, so schneiden diese sich im Allgemeinen; und wenn sie einander unendlich nahe rücken, so wird der Durchschnittspunkt ein Berührungspunkt, der der Enveloppe angehört. Demnach muss die Gleichung (6) im Allgemeinen für einen und denselben Werth von x und y wenigstens zwei verschiedene Werthe von y' geben, und zwei dieser Werthe müssen gleich werden, wenn x und y einem Punkt der Enveloppe angehören oder der Gleichung genügen, welche die singuläre Auflösung constituirt. Man hat also auszudrücken, dass die Gleichung (6) zwei gleiche Werthe für y' giebt. Dies geschieht, indem man $\frac{df}{dy'} = 0$ setzt, wenn $f(x, y, y')$ eine einförmige Function ist. Ist sie mehrförmig, so kann man sie durch Transformation zu einer einförmigen machen; man kann aber auch successive eine jede der verschiednen in $f(x, y, y') = 0$ enthaltenen Gleichungen behandeln und ausdrücken, dass sie gleiche Werthe für y' giebt, oder auch dass ein aus der einen gezogener Werth von y' gleich ist einem aus der anderen gezogenen Werthe von y'. Wenn z. B. die Gleichung (6) nach y' aufgelösst wäre, so könnte man nur das letzte Mittel anwenden und diese Werthe zwei und zwei gleich setzen. Es sei in allen Fällen $\varphi(x, y, y') = 0$ eine Gleichung, welche ausdrückt dass die Gleichung (6) zwei gleiche Werthe von y' giebt, so muss die singuläre Auflösung diesen zwei Gleichungen, und folglich dem Resultate der Elimination von y' zwischen ihnen genügen. Bewerkstelligt man also diese Elimination, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die singuläre Auflösung darbieten wird, wenn eine solche existirt. Man muss deshalb untersuchen, ob die verschiedenen Werthe von y in x, welche sie liefert, der Gleichung (6) genügen: diejenigen welche dies thun, ohne in dem allgemeinen Integral enthalten zu sein, sind die singulären Auflösungen. Es sei als Beispiel

$$(7) \qquad y = xy' + f(y'),$$

während f eine Function bezeichnet, welche nur einen Werth hat für einen und denselben Werth von y'. Wir haben als Bedingung der Gleichheit zweier Werthe von y'

$$(8) \qquad x + f'(y') = 0,$$

und zwischen diesen beiden Gleichungen ist y' zu eliminiren. Nehmen wir an dass man aus der Gleichung (8) zieht $y' = \varphi(x)$, so erhält man durch Einsetzen in (7)

$$(9) \qquad y = x\,\varphi(x) + f[\varphi(x)]\,.$$

Differentiirend findet man

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) + \varphi'(x)\,[x + f'\,\varphi(x)] = \varphi(x),$$

und folglich kann man die Gleichung (9) so schreiben:

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Sie genügt also der vorgelegten Differentialgleichung, und bildet ihre singuläre Auflösung; denn sie ist nicht in dem allgemeinen Integrale enthalten, das wir später bestimmen werden.

Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung.

17. Die allgemeinste Gleichung der ersten Ordnung, in welcher das Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ den ersten Grad nicht übersteigt, kann auf die Form gebracht werden

$$Qdy + Pdx = 0, \quad \text{oder} \quad Q\frac{dy}{dx} + P = 0,$$

wo P und Q irgend zwei Functionen von x und y sind. Immer kann man das allgemeine Verfahren auf sie anwenden, welches darin besteht, dass man y nach dem Satze von Taylor oder Maclaurin entwickelt. Bisweilen gelingt es die Reihe zu summiren; oft aber ist sie so complicirt, dass man sie nicht auf eine endliche Form zu reduciren vermag. Es folgen hier einige Beispiele, in welchen dieses Verfahren ohne Schwierigkeit anwendbar ist.

Es sei

$$\frac{dy}{dx} + ay + bx^3 = 0$$

Indem man differentiirt, findet man

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\,\frac{dy}{dx} + 3\,b\,x^2 = 0,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a\,\frac{d^2y}{dx^2} + 6\,b\,x = 0,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a\,\frac{d^3y}{dx^3} + 6\,b = 0,$$

. . . .

$$\frac{d^{4+m}y}{dx^{4+m}} + a\,\frac{d^{3+m}y}{dx^{3+m}} = 0.$$

Macht man in allen diesen Gleichungen $x = 0$, so kommt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\,a y_0\,,\quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = a^2 y_0\,,\quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = -\,a^3 y_0\,,$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = a^4 y_0 - 6\,b\,,\ \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_0 = -\,a^5 y_0 + 6\,b\,a,\,\ldots,$$

$$\left(\frac{d^{4+m}y}{dx^{4+m}}\right)_0 = -\,a\left(\frac{d^{3+m}y}{dx^{3+m}}\right)_0\,;$$

daher

$$y = y_0\left(1 - a x + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \cdots\right)$$
$$- 6\,b\left(\frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{a x^5}{1.2..5} + \frac{a^2x^6}{1\ldots6} - \cdots\right),$$

oder

$$y = y_0\,e^{-ax} - \frac{6\,b}{a^4}\left(e^{-ax} - 1 + a x - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3}\right),$$

oder da man $y_0 - \frac{6b}{a^4}$ durch eine willkürliche Constante c ersetzen kann,

$$y = c e^{-ax} + \frac{6\,b}{a^4}\left(1 - a x + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3}\right).$$

Nachdem das allgemeine Integral bekannt ist, würde man die singulären Integrale durch die oben auseinandergesetzte Methode erhalten. Es ist aber leicht zu sehen, dass im gegenwärtigen Falle keines existirt.

Es sei ferner $x\,\frac{dy}{dx} + y + a x^m = 0$, während m ganz und positiv ist.

Man erhält durch Differentiation

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+max^{m-1}=0\,,$$

$$x\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+m(m-1)ax^{m-2}=0\,,$$

. . . .

$$x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+(m+1)\frac{d^my}{dx^m}+m(m-1)\ldots2.1\,a=0\,,$$

$$x\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}}+(m+n)\frac{d^{m+n-1}y}{dx^{m+n-1}}=0\,,$$

wo n grösser als 1.

Macht man $x=0$, so werden y und alle Differentialcoëfficienten Null, indem man voraussetzt dass sie nicht unendlich werden, mit Ausnahme von $\frac{d^my}{dx^m}$ dessen Werth dann $-\frac{m(m-1)\ldots2.1.a}{m+1}$ ist; man findet daher $y=-\frac{ax^m}{m+1}$.

Dieses Integral hat keine willkürliche Constante und ist folglich nicht das allgemeine Integral. Dieses ist also nicht entwickelbar nach den ganzen und positiven Potenzen von x. Und in der That, wenn man durch die Methoden integrirt, welche wir sehr bald werden kennen lernen, so findet man als allgemeines Integral

$$y=\frac{C}{x}-\frac{ax^m}{m+1}\,.$$

Die Auflösung, welche wir fanden, ist also ein particuläres, $C=0$ entsprechendes Integral.

Es ist leicht zu sehen, dass es kein singuläres Integral giebt.

Von den Factoren, welche das erste Glied der Gleichung unmittelbar integrabel machen. Integration der linearen Gleichung.

18. Wenn das erste Glied der Gleichung $Qdy+Pdx=0$ das Differential einer Function von x und y wäre, so würde es nothwendig und hinreichend sein, diese Function gleich einer Constante zu setzen, um der vorgelegten Gleichung zu genügen. Die Bedingung für diesen Umstand ist, wie wir ge-

sehen haben, $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$. Wenn sie nicht erfüllt ist, und das erste Glied der Gleichung, indem man es mit einer Function v multiplicirt, zum Differentiale einer Function u wird, so ist die Gleichung äquivalent mit $\frac{1}{v}\,du = 0$, und es wird ihr genügt, sowohl indem man $du = 0$ macht, woraus $u = c$, welches das allgemeine Integral ist mit der willkürlichen Constante c, — als auch indem man $\frac{1}{v} = 0$ setzt, was eine singuläre Auflösung liefert, wenn sie nicht schon in der vorigen steckt.

So z. B. kann man die Gleichung

$$F(x)\,f(y)\,dy + \varphi(x)\,\psi(y)\,dx = 0$$

in die Form bringen

$$F(x)\,\psi(y)\left[\frac{f(y)}{\psi(y)}\,dy + \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx\right] = 0\,,$$

und man genügt ihr, indem man $F(x) = 0$, oder $\psi(y) = 0$, oder endlich

$$\frac{f(y)}{\psi(y)}\,dy + \frac{\varphi(x)}{F(x)}\,dx = 0$$

setzt, wovon das erste Glied ein vollständiges Differential ist, da die Variablen getrennt sind.

19. Man kann beweisen, dass immer ein Factor existirt, welcher $Q\,dy + P\,dx$ zu einem vollständigen Differentiale macht. In der That, es ist bewiesen, dass die vorgelegte Gleichung ein, eine willkürliche Constante c enthaltendes Integral hat, welches wir durch $F(x, y, c) = 0$ bezeichnen wollen; und die Differentialgleichung ist nothwendig erhalten worden durch Eliminiren von c zwischen dieser letzten Gleichung und derjenigen, welche man aus ihr durch Differentiiren erhalten hat, nachdem man sie zuvor irgendwie transformirt hatte. Wie aber auch diese Transformation geschehe, in Nr. 8 ist bewiesen dass man durch Elimination von c immer denselben Werth für $\frac{dy}{dx}$ in x und y erhält.

Denken wir uns nun die Gleichung $F(x, y, c)$ in die Form gebracht $\varphi(x, y) = c$, woraus $\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0$. Da der

hieraus gezogene Werth von $\frac{dy}{dx}$ und derjenige, welchen die vorgelegte Gleichung giebt, nach dem eben Gesagten in x und y identisch sein müssen, so hat man identisch

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{P}{Q}.$$

Addirt man beiderseits $\frac{dy}{dx}$ und multiplicirt mit $\frac{d\varphi}{dy}$, so hat man, was auch x, y, dx, dy seien, die neue Identität

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} + \frac{P}{Q}\right)\frac{d\varphi}{dy}.$$

Das erste Glied ist die totale Ableitung einer Function φ von x und y, also ist dasselbe mit dem zweiten der Fall; und folglich wird, indem man die vorgelegte Gleichung mit $\frac{1}{Q} \cdot \frac{d\varphi}{dy}$ multiplicirt, ihr erstes Glied ein vollständiges Differential. Man sieht, wie dieser Factor $v = \frac{1}{Q}\,\frac{d\varphi}{dy}$ mit dem ersten Gliede des unter die Form $\varphi = c$ gebrachten allgemeinen Integrals verbunden ist.

20. Nachdem die Existenz des Factors v erwiesen ist, suchen wir, wie es möglich wird ihn zu entdecken.

Die ihn bestimmende Gleichung ist leicht zu bilden, denn man soll die Identität haben

$$d\,\frac{vQ}{dx} = d\frac{vP}{dy}, \text{ oder } Q\frac{dv}{dx} - P\frac{dv}{dy} = v\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Wenn v x und y zugleich enthalten muss, so ist dies eine Gleichung mit partiellen Differentialen, und schwieriger zu integriren als die vorgelegte. Man muss daher im Allgemeinen auf die Bestimmung dieses Factors verzichten.

Braucht aber v nur eine Variable, x z. B., zu enthalten, so kann man leicht seinen Werth bestimmen. In der That, die vorige Gleichung wird dann

$$Q\,\frac{dv}{dx} = v\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$$

oder

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Folglich ist es dazu nothwendig, dass die gegebenen Coëfficienten P und Q solche sind, dass der Ausdruck $\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)$ unabhängig ist von y.

Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man v unabhängig von y annehmen, also setzen, indem $\varphi(x)$ den vorstehenden Ausdruck bezeichnet,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \varphi(x),$$

woraus

$$\log\frac{v}{c} = \int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx.$$

Der Coëfficient c ist willkürlich und fällt überdies von selbst weg.

Für den hieraus resultirenden Werth von v ist $v(Pdx + Qdy)$ ein vollständiges Differential. Indem man dies integrirt, findet man

$$\int_{x_0}^{x} P\,e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx}\,dx + \int_{y_0}^{y} Q_0\,dy = C.$$

Dies ist das allgemeine Integral von $Qdy + Pdx = 0$. Die Discussion würde dieselbe sein, wenn der integrirende Factor v von x unabhängig wäre.

21. Die vorhergehende Rechnung würde sich vereinfachen, wenn die Gleichung $dy + Pdx = 0$ vorgelegt wäre. Es müsste aber dann $\frac{dP}{dy}$ unabhängig von y sein, es müsste also

$$P = Xy + X_1,$$

wo X und X_1 beliebige Functionen von x bezeichnen. Nehmen wir also die Gleichung an

$$dy + (Xy + X_1)\,dx = 0.$$

Der integrirende Factor v wird jetzt $e^{\int X dx}$; durch Multipliciren mit demselben hat man

$$e^{\int X dx}\,dy + Xy e^{\int X dx}\,dx + X_1 e^{\int X dx}\,dx = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$y e^{\int X dx} + \int X_1 e^{\int X dx} dx = C,$$

wo C eine willkürliche Constante; daraus folgt

$$y = e^{-\int X dx} (C - \int X_1 e^{\int X dx} dx).$$

Dies ist das allgemeine Integral der linearen Gleichung erster Ordnung. Die von $\int X dx$ herrührende willkürliche Constante verschwindet von selbst, und die Constante C ist die einzige, welche in den Werth von y eingeht.

Betrachten wir, als sehr einfache Anwendung, die folgende Aufgabe, welche den Geometern durch de Beaune, einen Freund von Descartes, vorgelegt wurde:

Man soll eine solche Curve finden, dass die Subtangente zu der Ordinate sich verhält wie eine constante Linie zu der Ordinate dieser Curve, wenn man diese Ordinate um diejenige einer Gerade vermindert, die unter einem halben rechten Winkel gegen die Axe der x geneigt ist.

Nimmt man den Anfangspunkt im Durchschnitt dieser Gerade mit der Axe der x, so ist deren Gleichung $x = y$, und die gegebene Bedingung wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{a}, \text{ oder } a \frac{dy}{dx} - y = -x,$$

wo a der gegebene Werth der constanten Linie ist.

Diese lineare Gleichung, nach irgend einer der angegebenen Verfahrungsarten integrirt, giebt

$$y = x + a + Ce^{\frac{x}{a}},$$

wo C eine willkürliche Constante.

Nimmt man jetzt zur Axe der x' die Gerade, deren Gleichung $y = x + a$ ist, und behält man die Axe der y als Axe der y' bei, so wird

$$y' = Ce^{\frac{x}{a}}, \quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}}, \quad \text{und folglich } y' = Ce^{\frac{x'}{a\sqrt{2}}}.$$

Die Curve ist also eine logarithmische, deren Ordinaten mit der Axe einen halben rechten Winkel machen.

22. Wir haben bewiesen, dass in allen Fällen ein Factor existirt, welcher geeignet ist, das erste Glied integrabel zu machen. Wir wollen sehen, ob nur einer existirt.

Es sei v eine erste solche Function, dass $v(Qdy + Pdx)$ das Differential einer Function u von x und y ist. Zunächst ist dann evident, dass auch der Factor $v\varphi(u)$ das erste Glied integrabel macht: denn, weil $v(Qdy + Pdx) = du$, so hat man $v\varphi(u)(Qdy + Pdx) = \varphi(u)\,d(u)$, welches das Differential von $\int\varphi(u)\,du$ ist.

Es sei jetzt V irgend eine andere solche Function, dass $V(Qdy + Pdx) = dU$, wo U eine Function von x und y bezeichnet. Man folgert hieraus die Identität

$$\frac{V}{v}\,du = dU.$$

Da nun das zweite Glied ein vollständiges Differential ist, so muss das in x und y ihm identische erste Glied auch ein solches sein; was nur sein kann, wenn $\frac{V}{v}$ eine Function von u allein ist. Diese letzte Behauptung, welche man gewöhnlich als evident hinstellt, muss indessen erwiesen werden.

Wir wollen also allgemein zeigen, dass wenn $u = f(x, y)$, der Ausdruck $F(x, y)\,du$ oder $F(x, y)\left[\frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy\right]$ kein vollständiges Differential in Beziehung auf die beiden Variablen x und y sein kann, wenn man nicht hat

$$F(x, y) = \psi(u) = \psi[f(x, y)],$$

wie übrigens auch die Function ψ sei.

In der That, eliminiren wir y vermöge der Gleichung $u = f(x,y)$, so wird $F(x,y)$ eine Function von u und x, $\varphi(u,x)$. Der Ausdruck, welcher ein vollständiges Differential in Beziehung auf x und y war, wird es in Beziehung auf x und u sein; $\varphi(u, x)\,du$ wird also ein vollständiges Differential einer Function von zwei unabhängigen Variablen x und u sein; was absurd wäre, wenn x in diesem Ausdrucke bliebe, der nicht dx enthält. Es ist daher nothwendig, dass $\varphi(u, x)$ kein x enthalte, und folglich, dass $F(x, y)$ eine Function von u oder von $f(x, y)$ sei.

Kehren wir nun zu unserer Frage zurück, so sehen wir, dass wenn ein Factor v dem ersten Gliede die Form des Differentials einer Function u von x, y giebt, alle Factoren, welche diese Eigenschaft besitzen, von der Form $v\varphi(u)$ sind, wo φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Die vorgelegte Gleichung wird also

$$du = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(u)\,du = 0,$$

und aus beiden folgt $u = c$, während c eine willkürliche Constante.

Alle diese Factoren führen somit zu demselben Resultate, und sie unterscheiden sich nur durch den Factor $\varphi(u)$, welcher eine Function von x, y ist, sich aber vermöge des Integrals $u = c$ auf eine willkürliche Constante reducirt. Man sieht, dass wenn zwei verschiedene Factoren bekannt sind, welche das erste Glied der Gleichung integrabel machen, man das allgemeine Integral erhält, indem man ihr Verhältniss gleich einer willkürlichen Constante setzt.

Integration der homogenen Gleichungen und der linearen Gleichung, durch Trennung der Variablen.

23. Manchmal kann man durch eine Vertauschung der Variablen die Integration der gegebenen Gleichung auf Quadraturen zurückführen, indem sich die neuen Variablen in der transformirten Gleichung trennen.

Betrachten wir zuerst eine beliebige homogene Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

d. h. eine solche, worin M und N homogene Functionen derselben Ordnung m von x, y sind. Wie man weiss, ist diejenige eine homogene Function $m$ter Ordnung der Variablen $x, y, z \ldots$, welche sich durch den Factor g^m multiplicirt findet, wenn man die Variablen respective in gx, gy, gz etc. verändert.

Setzen wir $y = ux$, also $dy = udx + xdu$.

Die Functionen M und N werden gleich x^m multiplicirt mit Functionen von u: und die durch x^m getheilte Gleichung nimmt die Form an

$$F(u)\,dx + f(u)\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

oder

$$[F(u) + uf(u)]\,dx + xf(u)\,du = 0$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{f(u)\,du}{F(u) + uf(u)} = 0,$$

und die Variablen sind getrennt.

Das erste Glied ist zu einem vollständigen Differential geworden, indem man es zuerst durch x^m, dann durch

$$x\,[F(u) + uf(u)] \text{ oder } xF\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{y}{x}\right)$$

getheilt hat. Im Ganzen ist es also durch $Mx + Ny$ getheilt worden.

Also ist der Factor, welcher das erste Glied unmittelbar integrabel macht, $\frac{1}{Mx + Ny}$. Wenn $Mdx + Ndy$ bereits ein vollständiges Differential wäre, so würden $\frac{1}{Mx + Ny}$ und 1 zwei integrirende Factoren sein; ihr Verhältniss wäre daher gleich einer Constante, und das allgemeine Integral wäre folglich $Mx + Ny = c$.

24. Da der Ausdruck $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ ein vollständiges Differential ist, so führt die bekannte Bedingung zu der Gleichung

$$\frac{x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy}}{M} = \frac{x\frac{dN}{dx} + y\frac{dN}{dy}}{N}.$$

Wie also auch die homogene Function M von der $m$ten Ordnung sei, der Ausdruck $\frac{x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy}}{M}$ ist constant. Man kann seinen Werth finden, indem man die besondere Function x^m nimmt, und man findet m. Daher hat man allgemein

$$x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy} = mM,$$

und dies ist das Theorem von den homogenen Functionen.

25. Erstes Beispiel. — Es sei

$$(ax + by)\,dx = (mx + ny)\,dy.$$

Indem man setzt

$$y = ux, \quad \text{also } dy = u\,dx + x\,du,$$

geht die vorgelegte Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{mx + ny}$ über in

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{a + bu}{m + nu} \quad \text{oder } x\frac{du}{dx} = \frac{a + (b - m)u - nu^2}{m + nu};$$

woraus man zieht

$$\frac{dx}{x} = \frac{m + nu}{a + (b - m)u - nu^2}\,du.$$

Da die Variablen getrennt sind, so kann man beide Glieder integriren, was keine Schwierigkeit darbietet. Nachher wird man u durch $\frac{y}{x}$ ersetzen, und man hat dann das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

26. Zweites Beispiel. — Es sei

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Da auch diese Gleichung homogen in Bezug auf x und y ist, so setzt man $y = ux$ und hat nach gemachter Reduction

$$x\,du = dx\sqrt{1 + u^2}, \text{ oder } \frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Indem man integrirt und durch c eine willkürliche Constante bezeichnet, kommt

$$\log\frac{x}{c} = \log\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right),$$

daher

$$x = c\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = c\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right).$$

Man zieht hieraus successive

$$x^2 = c\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad (x^2 - cy)^2 = c^2(x^2 + y^2),$$
$$x^2 = 2cy + c^2.$$

27. Drittes Beispiel. — Man kann bisweilen durch eine einfache Transformation eine Gleichung homogen machen, welche es nicht ist. Es sei z. B.

$$(ax + by + m)\,dx = (px + qy + n)\,dy;$$

um die von x und y unabhängigen Glieder verschwinden zu machen, setzen wir

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad \text{also} \quad dx = dx', \; dy = dy',$$

und bestimmen α und β durch die zwei Bedingungen

$$a\alpha + b\beta + m = 0, \quad p\alpha + q\beta + n = 0,$$

welche ergeben

$$\alpha = \frac{nb - mq}{aq - bp}, \quad \beta = \frac{mp - na}{aq - bp}.$$

Setzen wir zunächst voraus, dass nicht $aq - bp = 0$. Die vorgelegte Gleichung findet sich auf folgende zurückgeführt:

$$(ax' + by')\,dx' = (px' + qy')\,dy',$$

welche homogen ist, und wie oben integrirt wird; zuletzt setzt man $x - \alpha$, $y - \beta$ statt x' und y'. Aber diese Transformation würde unmöglich sein, wenn man hätte $aq - bp = 0$. In diesem Falle wird die vorgelegte Gleichung, indem man statt q seinen Werth $\frac{bp}{a}$ setzt,

$$(ax + by)(adx - pdy) = a(ndy - mdx).$$

Nun wird man setzen

$$ax + by = z, \quad \text{daher} \quad dy = \frac{dz - adx}{b},$$

und die Elimination von y giebt

$$adx = \frac{(an + pz)\,dz}{an + mb + (b + p)\,z};$$

da die Variablen getrennt sind, so ist die Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt.

In dem allgemeinen Falle kann man die Gleichung auch homogen machen durch die Substitutionen

$$ax + by + m = t, \quad px + qy + n = u,$$

woraus man zieht

$$dx = \frac{qdt - bdu}{aq - bp}, \quad dy = \frac{adu - pdt}{aq - bp}.$$

Die vorgelegte Gleichung wird dadurch in die folgende, welche homogen ist, transformirt:

$$(pu + qt)\,dt = (au + bt)\,du.$$

28. Nehmen wir zur geometrischen Anwendung eine Aufgabe, welche die Mathematiker bei der Entstehung der Inte-

gralrechnung viel beschäftigt hat, und welche sie das Problem der Trajectorien nannten. Es handelt sich darum, eine Curve zu finden, welche unter einem gegebenen Winkel alle in einer gegebenen Gleichung

$$(1) \qquad F(x, y, a) = 0$$

enthaltenen schneidet, worin der Parameter a alle möglichen Werthe annehmen kann.

Bezeichnet man durch m die Tangente des gegebenen Winkels, durch x', y' die Coordinaten irgend eines Punktes des gesuchten Ortes, und durch α den Winkel, welchen die Tangente der gegebenen Curve mit der Axe der x bildet, so soll man haben

$$(2) \qquad m = \frac{\frac{dy'}{dx'} - tang\,\alpha}{1 + \frac{dy'}{dx'}\,tang\,\alpha}.$$

Nun giebt die Gleichung (1)

$$tang\,\alpha = -\frac{\frac{dF}{dx'}}{\frac{dF}{dy'}};$$

die Gleichung (2) wird daher

$$(3) \qquad m\left(\frac{dF}{dy'} - \frac{dF}{dx'}\frac{dy'}{dx'}\right) - \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dx'} - \frac{dF}{dx'} = 0,$$

und da man zu gleicher Zeit hat

$$F(x', y', a) = 0,$$

so erhält man, wenn man zwischen dieser Gleichung und (3) a eliminirt, eine Gleichung zwischen den Coordinaten irgend eines Punktes des Ortes.

Untersuchen wir im Besonderen den Fall, wo die Gleichung (1) von der Form ist

$$(4) \qquad y^n = a x^p,$$

so hat man

$$\frac{dF}{dx} = -a p x^{p-1}, \quad \frac{dF}{dy} = n y^{n-1},$$

und die Gleichung (3) wird

$$m\left(n y^{n-1} + a p x^{p-1}\frac{dy}{dx}\right) - n y^{n-1}\frac{dy}{dx} + a p x^{p-1} = 0,$$

und durch Eliminiren von a zwischen dieser und der ersten Gleichung erhält man

$$(5) \qquad m\left(nx + py\frac{dy}{dx}\right) - nx\frac{dy}{dx} + py = 0\,,$$

eine homogene Gleichung, welche man ohne Schwierigkeit integriren wird.

1. Nehmen wir z. B. $n = p = 1$, so wird die Gleichung (4)

$$y = ax\,,$$

und stellt alle durch den Anfangspunkt gehenden Geraden dar. Die Gleichung (5) wird

$$m\,(xdx + ydy) - xdy + ydx = 0\,.$$

Man erkennt hier, dass das erste Glied ein vollständiges Differential wird, indem man es durch $x^2 + y^2$ theilt. Man erhält also, integrirend,

$$\frac{m}{2}\,l\,(x^2 + y^2) - arc\,tang\,\frac{y}{x} = c\,.$$

Geht man auf Polarcoordinaten über, indem man setzt

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta\,,$$

so findet man

$$m\,l\,r = \theta + c\,,$$

daher

$$r = e^{\frac{\theta + c}{m}}\,,$$

oder, indem man $e^{\frac{c}{m}} = c'$ macht,

$$r = c'\,e^{\frac{\theta}{m}}\,.$$

Man erhält also unendlich viele ähnliche logarithmische Spiralen, welche denselben Asymptotenpunkt haben.

2. Setzen wir $m = \infty$ voraus, welches orthogonale Trajectorien liefert, so reducirt sich die Gleichung (5) auf

$$nx + py\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

woraus man zieht

$$nx^2 + py^2 = c\,.$$

Je nachdem n und p gleiche oder verschiedene Zeichen haben, liefert diese Gleichung unendlich viele ähnliche Ellipsen

oder Hyperbeln, und diese sind die einzigen Curven mit der Eigenschaft, unter einem rechten Winkel alle in der Gleichung

$$y^n = a x^p$$

steckenden Parabeln oder Hyperbeln zu schneiden.

Wenn jetzt $n = p = 1$, so hat die Trajectorie zur Gleichung

$$x^2 + y^2 = c\,,$$

ist also ein beliebiger Kreis, welcher zum Mittelpunkte den Durchschnittspunkt der durch die gegebene Gleichung

$$y = a x$$

dargestellten Geraden hat.

Wenn $n = -p = 1$, so haben die gegebenen Curven zur Gleichung $y = \frac{a}{x}$, sind also alle gleichseitigen Hyperbeln, welche zu Asymptoten die Coordinatenaxen haben. Die Trajectorien haben zur allgemeinen Gleichung $x^2 - y^2 = c$, und sind alle gleichseitigen Hyperbeln, welche zu Asymptoten die Halbirungslinien der Winkel der Asymptoten der ersten haben.

29. Lineare Gleichung. — Man kann durch eine Vertauschung der Variablen auch die lineare Gleichung der ersten Ordnung

$$dy + X y dx + X_1 dx = 0$$

integriren. Es sei $y = uz$; u und z sind unbestimmte Functionen von x. Man hat $dy = udz + zdu$, und substituirend

$$udz + zdu + Xuzdx + X_1 dx = 0\,.$$

Zunächst kann man u durch die Bedingung bestimmen $du + Xudx = 0$, und es resultirt hieraus $udz + X_1 dx = 0$. In der vorletzten trennen sich die Variablen, indem man durch u theilt, was $\frac{du}{u} + Xdx = 0$ giebt.

Integrirend, kommt $log\, u + \int X dx = 0$, da die willkürliche Constante in dem unbestimmten Integral enthalten ist.

Man zieht hieraus $u = e^{-\int X dx}$; in der Gleichung $udz + X_1 dx = 0$ substituirend, kommt

$$e^{-\int X dx} dz + X_1 dx = 0,\ \text{daher}\ z = -\int X_1 e^{\int X dx} dx + C,$$

wo die willkürliche Constante C sich auf das neue Integral

bezieht, das man von einer beliebigen Grenze an nehmen kann. Man erhält also

$$y = e^{-\int X dx}\left(C - \int X_1 e^{\int X dx} dx\right).$$

Die willkürliche Constante von $\int X dx$ verschwindet von selbst aus diesem Ausdruck, und es bleibt nur eine darin, wie es sein muss. Man hat so das schon durch eine andere Methode erhaltene Integral wieder.

30. Die Bernoulli'sche Gleichung. — Auf die lineare Gleichung kann man die folgende, welche zuerst von Jacob Bernoulli behandelt wurde, zurückführen:

$$dy + X y dx = X_1 y^{n+1} dx .$$

Wenn man setzt

$$z = y^{-n}, \quad \text{daher } y = z^{-\frac{1}{n}} \text{ und } dy = -\frac{1}{n} z^{-\frac{1}{n}-1} dz ,$$

so findet man durch Substitution in der vorgelegten und Reduction

$$dz - n X z dx + n X_1 dx = 0 ,$$

eine lineare Gleichung, deren Integral nach der vorigen Formel ist

$$z = e^{n\int X dx}\left(C - n\int X_1 e^{n\int X dx}\right) = \frac{1}{y^n} .$$

Der Werth von y findet sich hieraus unmittelbar.

Man kann zu demselben Resultate gelangen durch eine andere, schon für die lineare Gleichung angewandte Transformation.

Es sei $y = uz$; die vorgelegte Gleichung wird

$$u dz + z du + X u z dx = X_1 u^{n+1} z^{n+1} dx ,$$

und lässt sich in die zwei folgenden zerlegen

$$dz + X z dx = 0, \quad du = X_1 u^{n+1} z^n dx ;$$

woraus man zieht

$$z = e^{-\int X dx}, \quad u^{-n} = -n\left(\int_{x_0}^{x} X_1 e^{-n\int X dx} dx + C\right),$$

worin das Integral $\int X dx$ unbestimmt ist. Man folgert daraus

$$\frac{1}{y^n} = -n e^{n\int X dx}\left(\int_{x_0}^{x} X_1 e^{-n\int X dx} dx + C\right).$$

Die durch $\int X dx$ eingeführte Constante verschwindet offenbar, so dass man dieses Integral von irgend einem Werthe an nehmen kann; y enthält also nur die einzige Constante C.

Man kann manchmal das allgemeine Integral einer Gleichung erster Ordnung, von welcher man ein particuläres Integral kennt, erhalten durch eine sehr einfache, von Euler angewandte Transformation.

Es sei z. B.

$$dy + Xy dx = X_1 y^2 dx + X_2 dx .$$

Diese Gleichung hat mehr als die vorhergehende das Glied $X_2 dx$, aber der Exponent $n + 1$ hat den besonderen Werth 2. Nehmen wir an, dass z eine Function von x sei, welche dieser Gleichung genügt, ohne eine willkürliche Constante zu enthalten; und setzen wir $y = z + u$, wo u eine unbekannte Function von x ist. Indem man Rücksicht nimmt auf die nach der Voraussetzung stattfindende Gleichung

$$dz + Xz dx = X_1 z^2 dx + X_2 dx ,$$

bleibt

$$du + (X - 2 z X_1) u dx = X_1 u^2 dx .$$

Da diese Gleichung in der zuletzt integrirten enthalten ist, so kann man aus ihr den Werth von u mit einer willkürlichen Constante finden, und man kennt dann den allgemeinen Werth von y.

Hätte man nicht $n + 1 = 2$, so würde dieselbe Substitution wieder $X_2 dx$ verschwinden machen, aber sie würde neue Potenzen von y einführen, welche die Integration der transformirten nicht mehr erlauben würden.

Gleichungen der ersten Ordnung, in welchen die Ableitung in einem höheren als dem ersten Grade vorkommt.

31. Wenn die Gleichung $\frac{dy}{dx}$ in höheren Potenzen als der ersten enthält, und man sie in Bezug auf diese Grösse auflösen kann, so erhält man dadurch mehrere Gleichungen von der Form $Pdx + Qdy = 0$, welche man zu integriren suchen wird. Es seien $\varphi(x, y, c) = 0$, $\varphi_1(x, y, c) = 0$ etc. diese verschiedenen Integrale, in welchen c eine willkürliche Con-

stante bezeichnet, so werden alle Auflösungen der vorgelegten Gleichung in der folgenden enthalten sein:

$$\varphi(x, y, c) \cdot \varphi_1(x, y, c) \ldots = 0 .$$

Offenbar kann man, der Allgemeinheit unbeschadet, die Constante c in den verschiedenen Factoren als dieselbe betrachten.

Es sei z. B.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0, \quad \text{daher } \frac{dy}{dx} = \pm a ;$$

man hat die beiden Integrale

$$y = ax + c , \qquad y = - ax + c' ,$$

und das vollständige Integral ist

$$(y - ax - c)(y + ax - c') = 0 ,$$

oder, was einfacher ist, ohne weniger allgemein zu sein,

$$(y - ax - c)(y + ax - c) = 0, \text{ oder } (y - c)^2 - a^2x^2 = 0 .$$

32. Wenn die Gleichung nicht aufgelöst werden kann in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$, aber in Bezug auf y oder x, so hat man eine der beiden allgemeinen Formen zu betrachten:

$$y = F(x, p) , \qquad x = F(y, p) ,$$

wo p das Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet. In diesen beiden Fällen führt die Differentiation zu einer Gleichung der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen p und x, oder p und y. Kann man ein erstes Integral derselben finden, welches mit dem vorgelegten nicht zusammenfällt, so wird man p zwischen ihm und der vorgelegten Gleichung eliminiren, und man hat dann das gesuchte allgemeine Integral.

Enthält das zweite Glied nur die Variable p, ist also

(a) $\quad y = F(p)$, oder (b) $\quad x = F(p)$,

so erhält man im ersten Falle durch theilweises Integriren von $dx = \frac{dy}{p}$:

(c) $$x = \frac{F(p)}{p} + \int \frac{F(p)}{p^2} dp + C ,$$

und im zweiten Falle durch theilweises Integriren von $dy = p\,dx$:

(d) $$y = p F(p) - \int F(p)\, dp + C .$$

Das allgemeine Integral ergiebt sich dann durch Elimination von p zwischen (a) und (c), oder resp. (b) und (d).

33. Wenn die Gleichung die Form hat

$$y = xF(p) + f(p),$$

so giebt die Differentiation

$$p\,dx = F(p)\,dx + xF'(p)\,dp + f'(p)\,dp.$$

Diese Gleichung von der zweiten Ordnung hat zwei Integrale von der ersten Ordnung: das eine fällt mit der vorgelegten, um eine Constante vermehrten Gleichung zusammen; das andere erhält man durch einfache Quadraturen, indem man bemerkt, dass diese Gleichung linear ist in Beziehung auf x und dx. Indem man p zwischen diesem Integrale und der gegebenen Gleichung eliminirt, erhält man das allgemeine Integral, und aus diesem wird man die singulären Integrale nach der früher auseinandergesetzten Theorie finden.

34. In dem besonderen Falle, wo $F(p) = p$, hat man

$$y = px + f(p);$$

differentiirend, kommt

$$0 = [x + f'(p)]\,dp,$$

welcher Gleichung man auf zwei Arten genügt.

Wenn man $dp = 0$ setzt, so folgt $p = c$, und indem man p eliminirt, hat man als allgemeines Integral

$$y = cx + f(c).$$

Wenn man $x + f'(p) = 0$ setzt, und p zwischen dieser und der vorgelegten Gleichung eliminirt, so erhält man das singuläre Integral; denn der aus der letzten Gleichung gezogene Werth von p ist eine Function von x, und die Elimination führt zu demselben Resultate, wie wenn man diese Function von x statt c in das allgemeine Integral setzt: die Auflösung, welche man erhält, resultirt also nicht aus einem besonderen der Constante beigelegten Werthe.

Man sieht übrigens, dass p eliminiren zwischen $x + f'(p) = 0$ und $y = px + f(p)$ dasselbe ist, als wenn man c eliminirt zwischen

$$x + f'(c) = 0 \text{ und } y = cx + f(c);$$

und da $x + f'(c)$ die Ableitung von $cx + f(c)$ nach c ist, so gelangt man in der That zu der singulären Auflösung der Gleichung, deren allgemeines Integral $y = cx + f(c)$ ist.

35. Wir wollen das Verfahren, welches wir kennen gelernt haben, anwenden zur Lösung einiger geometrischen Aufgaben.

Mam soll eine solche Curve finden, dass das Product der von zwei festen Punkten auf eine beliebige Tangente gefällten Senkrechten constant ist.

Bezeichnen wir durch $2c$ die Entfernung dieser beiden Punkte, und durch b^2 das Product der Senkrechten; nehmen wir zum Ursprung die Mitte zwischen den zwei gegebenen Punkten, und zur Axe der x die Gerade, welche sie verbindet. Die gegebene Bedingung führt unmittelbar zu der Gleichung

$$\frac{(y - px)^2 - c^2 p^2}{1 + p^2} = \pm b^2 ,$$

worin das obere Zeichen dem Falle entspricht, wo die beiden Punkte auf derselben Seite der Tangente liegen, und das untere Zeichen demjenigen, wo sie auf verschiedenen Seiten liegen. Man zieht aus dieser Gleichung

$$(1) \qquad y = px + \sqrt{(c^2 \pm b^2)\, p^2 \pm b^2} ;$$

was ein besonderer Fall der Gleichung $y = px + f(p)$ ist. Indem man den allgemein angezeigten Gang befolgt, findet man differentiirend

$$(2) \qquad dp \left[x + \frac{p\,(c^2 \pm b^2)}{\sqrt{(c^2 \pm b^2)\, p^2 \pm b^2}} \right] = 0 ;$$

setzt man nun $dp = 0$, woraus $p = \alpha$, während α eine willkürliche Constante; eliminirt man darauf p zwischen dieser letzten Gleichung und der (1), so hat man das allgemeine Integral

$$y = \alpha x + \sqrt{(c^2 \pm b^2)\, \alpha^2 \pm b^2} ,$$

welches unendlich viele Geraden darstellt, die Tangenten sind an der Curve von der Gleichung

$$(3) \qquad (c^2 \pm b^2)\, y^2 \pm b^2 x^2 = \pm (c^2 \pm b^2)\, b^2 ;$$

woraus man schon schliessen kann, dass diese Curve die singuläre Auflösung ist, weil sie die Enveloppe der particulären Integrale bildet.

In dem Falle, wo man die oberen Zeichen nimmt, ist sie nichts Anderes als eine Ellipse, deren Brennpunkte die zwei gegebenen Punkte sind, und deren kleine Axe gleich $2b$ ist. Nimmt man die unteren Zeichen, so sind, da die beiden Punkte auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen, die Perpendikel respective kleiner als die Segmente der mit $2c$ gleichen Gerade, woraus $c > b$ folgt. Die Curve ist daher jetzt eine Hy-

perbel, welche zu Brennpunkten die zwei gegebenen Punkte, und zur imaginären Axe $2b$ hat.

Der zweite Factor der Gleichung (2) muss auch die singuläre Auflösung geben, wie dies allgemein bewiesen wurde. Indem man ihn gleich Null setzt, hat man

$$(4) \qquad x + \frac{p\,(c^2 \pm b^2)}{\sqrt{(c^2 \pm b^2)\,p^2 \pm b^2}} = 0\,.$$

Eliminirt man p zwischen (1) und (4), so findet man wieder die Gleichung (3), wie es sein muss.

In dieser Aufgabe wird die Curve, welche man bestimmen wollte, nicht durch das allgemeine Integral, sondern durch die singuläre Auflösung gegeben; welches zeigt, dass man diese letzte immer mit derselben Sorgfalt wie das erste suchen muss.

36. Man giebt zwei Parallelen und auf jeder von ihnen einen festen Punkt, und man verlangt die Gleichung der Curve, welche so ist, dass wenn man irgend eine Tangente an sie zieht, die Segmente, welche auf jeder Parallelen zwischen dem festen Punkte und dem Durchschnitt mit der Tangente liegen, ein constantes Product b^2 geben.

Es sei $2a$ die Entfernung der beiden festen Punkte; nehmen wir den Ursprung in ihrer Mitte, die Axe der x in ihrer Richtung, und die Axe der y parallel mit den zwei gegebenen Linien.

Die gegebene Bedingung liefert die Gleichung

$$(y - px)^2 - a^2p^2 = \pm\, b^2\,.$$

Das Zeichen $+$ des zweiten Gliedes bezieht sich auf den Fall, wo die beiden Segmente auf derselben Seite der Axe der x liegen, und das Zeichen — auf den Fall, wo sie auf verschiedenen Seiten liegen.

Man zieht aus dieser Gleichung

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}\,,$$

daher, differentiirend,

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2 \pm b^2}}\right) = 0\,.$$

Das allgemeine Integral erhält man, indem man setzt

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{woraus } p = \alpha\,,$$

während α eine willkürliche Constante, und indem man α in der Differentialgleichung der Curve dem p substituirt; dies giebt

$$y = \alpha x + \sqrt{a^2 \alpha^2 \pm b^2} \, .$$

Man erhält die singuläre Auflösung, wenn man p zwischen der Differentialgleichung der Curve und der folgenden

$$x + \frac{a^2 p}{\sqrt{a^2 p^2 \pm b^2}} = 0$$

eliminirt. Diese Rechnung führt zu der Gleichung

$$a^2 y^2 \pm b^2 x^2 = \pm a^2 b^2 \, ,$$

welche eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, bezogen auf ein System conjugirter Durchmesser, darstellt.

Das allgemeine Integral repräsentirt alle Tangenten an der einen oder anderen dieser zwei Curven.

37. Stellen wir uns noch die Aufgabe, die Curve zu bestimmen, welche so ist, dass der Theil einer jeden ihrer Tangenten, welcher zwischen zwei rechtwinkligen Geraden liegt, gleich einer gegebenen Länge a wird.

Nimmt man die beiden rechtwinkligen Geraden zu Coordinatenaxen, so wird man zu der Gleichung geführt

$$y = p x + \frac{a p}{\sqrt{1 + p^2}} \, ,$$

wo die Wurzel das doppelte Zeichen implicirt. Man findet, differentiirend,

$$dp \left[x + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \, .$$

Das allgemeine Integral ist, wenn c eine willkürliche Constante,

$$y = c x + \frac{a c}{\sqrt{1 + c^2}} \, ;$$

die singuläre Auflösung erhält man, indem man p zwischen der Differentialgleichung der Curve und der folgenden

$$x + \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

eliminirt. Man zieht hieraus zunächst

$$(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = - \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

welches, eingesetzt in die erste, giebt

$$y = p\, x^{\frac{1}{3}} \,(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}});$$

entnimmt man hieraus den Werth von p und substituirt ihn in der vorigen, so gelangt man zu der Gleichung

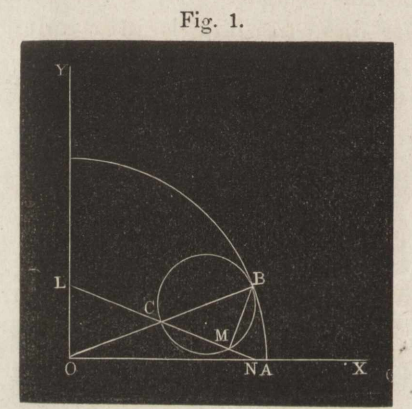
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

deren Discussion sehr leicht ist.

Wir wollen jetzt beweisen, dass diese Curve keine andere ist als die Epicycloide, welche durch einen Punkt eines Kreises vom Radius $\frac{a}{4}$ erzeugt wird, der auf der inneren Seite eines Kreises vom Radius a rollt.

In der That, es sei OB irgend ein Radius des Kreises vom Halbmesser a; beschreiben wir einen Kreis, welcher zum Durchmesser BC, die Hälfte von OB, hat, und nehmen wir den Bogen BM gleich dem Bogen BA; der Punkt M gehört dann der in Rede stehenden Epicycloide an, und es handelt sich darum, zu zeigen, dass derjenige Theil ihrer Tangente in dem beliebigen Punkte M, welcher in dem rechten Winkel YOX liegt, gleich a ist.

Fig. 1.



Die Normale dieser Curve ist BM, also die Tangente MC, und man hat zu zeigen, dass $LN = a$.

Bemerken wir hierzu, dass, nach der Theorie der Winkelmessung und der Bedingung $AB = BM$, der Winkel BCM das Doppelte ist von NOC, und folglich $NOC = CNO$; woraus $CN = OQ$.

Da $BCM = 2NOC$, so ist $LCB = 2LOC$, und folglich $LOC = OLC$; daher $LC = OC$, und somit $LN = a$; was zu beweisen war.

Totale Differentialgleichungen.

---

38. Die erste Aufgabe, welche wir in der Integralrechnung behandelt haben, hatte zum Gegenstand eine Function von nur einer Variable zu finden, wenn man den Ausdruck ihres Differentials durch diese Variable allein kennt. Wir haben darauf die Functionen mehrerer unabhängigen Variablen betrachtet, und uns die Aufgabe gestellt, sie zu bestimmen, wenn man ihr totales Differential oder ihre sämmtlichen partiellen Ableitungen der ersten Ordnung, in die unabhängigen Variablen allein ausgedrückt, kennt. Indem wir nachher auf das erste Problem zurückkamen, haben wir es auf den Fall ausgedehnt, wo das nach der einzigen unabhängigen Variable genommene Differential in seinem Ausdrucke die Function selbst vermischt mit der unabhängigen Variable enthält: was die Integration der Differentialgleichungen mit zwei Variablen constituirt. Wir wollen jetzt in derselben Weise das zweite Problem ausdehnen, also voraussetzen dass das totale Differential der unbekannten Function mehrerer unabhängigen Variablen die Function vermischt mit diesen Variablen enthält. Die Gleichungen, welche dem Differential der gesuchten Function einen solchen Ausdruck geben, werden totale Differentialgleichungen genannt. Wir beschränken uns auf diejenigen, welche drei Variablen enthalten.

Ihre allgemeinste Form ist

(1) $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, oder $dx = -\frac{Q}{P}\,dy - \frac{R}{P}\,dz$;

x wird als Function der unabhängigen Variablen y, z betrachtet, und das totale Differential von x enthält zugleich

diese Function und die unabhängigen Variablen, indem P, Q, R beliebige Functionen von x, y, z sind.

Wenn man den Werth von x in y und z kennte, und ihn in diesen drei Functionen substituirte, so würden $-\frac{Q}{P}$ und $-\frac{R}{P}$ identisch die partiellen Ableitungen von x nach y und z werden. Wenn man daher zunächst die allgemeinste Function von y sucht, welche der Bedingung genügt, dass ihre Ableitung nach y, $-\frac{Q}{P}$ ist, während z als eine Constante betrachtet wird, so wird der gesuchte Werth von x in demjenigen enthalten sein, welchen man so bestimmt hat; und es wird nur noch übrig bleiben, ihn der zweiten Bedingung zu unterwerfen.

Man muss also zunächst die Gleichung $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$ integriren, oder

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

worin z eine Constante ist. Mit diesem Problem haben wir uns im Vorhergehenden beschäftigt; und wenn man es sich aufgelöst denkt, so hat man eine Gleichung $U = 0$ zwischen x, y, z, C. Dabei bezeichnet C eine willkürliche Grösse, welche unabhängig ist von x, y, aber z auf irgend eine Weise enthalten kann; und es handelt sich nun darum, wenn es möglich ist, C so zu bestimmen, dass die partielle Ableitung von x nach z, identisch $-\frac{R}{P}$ ist, wenigstens wenn man für x seinen aus $U = 0$ gezogenen Werth substituirt hat.

Indem man die Gleichung $U = 0$ differentiirt und y als constant behandelt, kommt

$$\frac{dU}{dz} + \frac{dU}{dx}\left(\frac{dx}{dz}\right) + \frac{dU}{dC}\frac{dC}{dz} = 0;$$

und substituirt man nun $\frac{dx}{dz}$ den Werth $-\frac{R}{P}$, den es haben soll, so sieht man, dass es nothwendig und hinreichend sein wird, der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{dU}{dz} - \frac{R}{P}\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dC}\frac{dC}{dz} = 0$$

zu genügen, worin man sich x durch seinen Werth ersetzt denkt.

Da aber C kein y enthalten darf, so ist es nothwendig, dass die Substitution von x in dieser Gleichung y daraus verschwinden mache. Wenn dies nicht stattfindet, so ist das Problem unmöglich; und wenn es stattfindet, so hat man eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen C und z. Ihr allgemeines Integral enthält eine willkürliche Constante; und indem man den Werth von C, welchen man daraus ableitet, in der Gleichung $U = 0$ substituirt, erhält man diejenige Gleichung, welche x so bestimmt, dass den gegebenen Bedingungen genügt wird.

Wie man sieht, ist die Aufgabe nicht immer einer Auflösung fähig; und wenn sie eine solche hat, so wird das Integral gegeben durch eine Gleichung zwischen x, y, z, welche eine willkürliche Constante enthält, und welche man findet durch die Integration zweier Gleichungen erster Ordnung mit zwei Variablen.

39. Hieraus folgt, dass wenn die vorgelegte Aufgabe möglich ist, die Differentialgleichung resultirt aus der Elimination einer willkürlichen Constante zwischen einer Gleichung mit drei Variablen und ihrem gleich Null gesetzten totalen Differential; und diese Betrachtung wird uns sogleich zu einem wichtigen Satze führen.

Es sei $V = C'$ das Integral der Gleichung (1), aufgelöst in Bezug auf die willkürliche Constante C'. Indem man differentiirt, eliminirt man C', und das Resultat muss identisch dasselbe sein, wie wenn man die Elimination anders ausführt.

Die Gleichung

$$\frac{dV}{dx}\,dx + \frac{dV}{dy}\,dy + \frac{dV}{dz}\,dz = 0 \tag{3}$$

muss also identisch sein mit der Gleichung (1), wenn man die Coëfficienten eines und desselben Differentials, z. B. die von dx, beiderseits gleich gemacht hat.

Multiplicirt man daher die Gleichung (1) mit $\dfrac{\frac{dV}{dx}}{P}$, so wird sie identisch mit (3), und folglich wird ihr erstes Glied das vollständige Differential einer Function V von drei unabhängigen Variablen x, y, z. Woraus man die Folgerung zieht,

dass wenn die Aufgabe eine Auflösung zulässt, das erste Glied der gegebenen Gleichung ein vollständiges Differential wird durch Multiplication mit einer gewissen Function der drei Variablen.

Es sei μ ein solcher Factor dass $\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz$ ein vollständiges Differential ist, so hat man die drei Bedingungen:

$$\frac{d.\mu P}{dy} = \frac{d.\mu Q}{dx}, \quad \frac{d.\mu P}{dz} = \frac{d.\mu R}{dx}, \quad \frac{d.\mu Q}{dz} = \frac{d.\mu R}{dy},$$

oder, indem man entwickelt:

$$\mu \frac{dP}{dy} + P \frac{d\mu}{dy} = \mu \frac{dQ}{dx} + Q \frac{d\mu}{dx},$$
$$\mu \frac{dP}{dz} + P \frac{d\mu}{dz} = \mu \frac{dR}{dx} + R \frac{d\mu}{dx},$$
$$\mu \frac{dQ}{dz} + Q \frac{d\mu}{dz} = \mu \frac{dR}{dy} + R \frac{d\mu}{dy}.$$

Multiplicirt man die erste mit R, die zweite mit $-Q$, die dritte mit P, addirt, und lässt den Factor μ weg, so erhält man die identische Bedingungsgleichung

$$(4) \qquad P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Es ist daher unnütz, die Lösung der Aufgabe zu versuchen, wenn diese leicht zu verificirende Identität nicht stattfindet.

Umgekehrt lässt die Aufgabe, wenn sie stattfindet, immer eine Lösung zu; denn wir werden beweisen, dass in diesem Falle das erste Glied der Gleichung (2) unabhängig von y wird, wenn man x daraus eliminirt.

Zu grösserer Einfachheit nehmen wir an, dass die Gleichung $U = 0$ in Bezug auf die Constante C aufgelöst und durch $U = C$ ersetzt sei, was an den Bedingungen Nichts ändert. Die Gleichung (2) geht jetzt in folgende über:

$$\frac{dU}{dz} - R\,\frac{\frac{dU}{dx}}{P} - \frac{dC}{dz} = 0,$$

und es ist immer nothwendig, dass die Substitution von x, y aus ihr verschwinden mache.

Es sei v der Factor, welcher $P dx + Q dy$ zu einem vollständigen Differential macht, so hat man

$$v P dx + v Q dy = d U$$

und

$$v P = \frac{dU}{dx}, \quad v Q = \frac{dU}{dy}.$$

Die Grösse, welche y nicht mehr enthalten darf, ist

$$\frac{dU}{dz} - R\,\frac{\frac{dU}{dx}}{P} \quad \text{oder} \quad \frac{dU}{dz} - vR,$$

und man braucht nur auszudrücken, dass ihre Ableitung nach y Null ist, indem man x als eine Function von y betrachtet, deren partielle Ableitung nach y, $-\frac{Q}{P}$ ist. Man erhält so

$$\frac{d^2 U}{dz\,dy} - \frac{d^2 U}{dz\,dx}\cdot\frac{Q}{P} - v\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dR}{dx}\cdot\frac{Q}{P}\right) - R\left(\frac{dv}{dy} - \frac{dv}{dx}\cdot\frac{Q}{P}\right) = 0.$$

Multiplicirt man mit P, und beachtet dass $\frac{dU}{dy} = vQ$ und $\frac{dU}{dx} = vP$, so werden die beiden ersten Terme

$$P\,\frac{d.vQ}{dz} - Q\,\frac{d.vP}{dz},$$

oder, indem man entwickelt,

$$v\left(P\,\frac{dQ}{dz} - Q\,\frac{dP}{dz}\right);$$

und statt des vierten Terms $R\left(P\,\frac{dv}{dy} - Q\,\frac{dv}{dx}\right)$ kann man setzen $Rv\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$: die vorhergehende Bedingung wird daher mit Weglassung des gemeinschaftlichen Factors v

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0,$$

welche Gleichung sich von (4) nicht unterscheidet. Also ist diese schon als nothwendig erwiesene Gleichung zu gleicher Zeit hinreichend, damit die vorgelegte Aufgabe eine Lösung zulässt.

Man würde in einer ähnlichen Weise verfahren, wenn die Anzahl der Variablen grösser wäre.

Von den linearen Gleichungen einer beliebigen Ordnung.

---

40. Man nennt so diejenigen, in welchen die gesuchte Function und ihre Ableitungen bis zur $m$ten Ordnung nur mit dem ersten Grade vorkommen, und sich nicht unter einander multipliciren. Ihre allgemeine Form ist

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

während $A, \ldots, U, V$ beliebige Functionen von x sind. Diese Gleichungen besitzen eine bemerkenswerthe Eigenschaft, wenn das zweite Glied V fehlt, die darin besteht, dass die Summe mehrerer Auflösungen wieder eine Auflösung derselben Gleichung bildet.

In der That, es sei die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

Wenn y_1, y_2 etc. Functionen sind, welche dieser Gleichung genügen, so hat man

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy_1}{dx} + Uy_1 = 0,$$

$$\frac{d^m y_2}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy_2}{dx} + Uy_2 = 0, \text{ etc.}$$

Addirt man diese Gleichungen, so hat man das nämliche Resultat, wie wenn man $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ statt y in (2) setzt. Also bildet die Summe irgend einer Anzahl Functionen von x, welche der Gleichung (2) genügen, wieder eine Auflösung dieser Gleichung; und folglich ist, wenn man m particuläre Integrale kennt, deres jedes eine willkürliche Constante enthält, ihre Summe das allgemeine Integral.

Man bemerkt ausserdem, dass wenn ein Werth von y bekannt ist, man ihn mit einer willkürlichen Constante multipliciren kann, ohne dass er zu genügen aufhört; so dass wenn die m Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ der Gleichung (2) genügen, ihr allgemeines Integral sein wird

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

wenn $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürliche Constanten bezeichnen und man dieselben so bestimmen kann, dass für irgend einen Werth von x die Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ sämmtlich beliebige Werthe annehmen.

41. Wenn man die Gleichung (1) integriren soll, so fange man mit der Integration von (2) an, welche leichter ist. Kann man diese vollständig erreichen, so werden wir zeigen, wie man daraus das allgemeine Integral von (1) ableiten kann.

Es sei

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

das allgemeine Integral der Gleichung (2), wenn man $c_1, c_2, \ldots, c_m$ als willkürliche Constanten betrachtet. Es ist evident, dass man auf unendlich viele Arten diesen Constanten solche Functionen von x substituiren kann, dass man das allgemeine Integral der Gleichung (1) erhält; und wir werden sehen, dass

eine Bestimmung derselben möglich ist, welche nur einfache Quadraturen erfordert.

Indem man den vorstehenden Ausdruck differentiirt, erhält man

$$dy = c_1\, dy_1 + c_2\, dy_2 + \ldots + c_m\, dy_m + y_1\, dc_1 + y_2 dc_2 + \ldots + y_m\, dc_m\,.$$

Man kann nun c_1, c_2, ..., c_m der Bedingung unterwerfen

$$y_1\, dc_1 + y_2\, dc_2 + \ldots + y_m\, dc_m = 0,$$

und es resultirt hieraus

$$dy = c_1\, dy_1 + c_2\, dy_2 + \ldots + c_m\, dy_m\,.$$

Diesen neuen Ausdruck kann man differentiiren, und wieder die Gesammtheit der Glieder, welche die Differentiale dc_1, dc_2, ..., dc_m enthalten, gleich Null setzen; und so kann man fortfahren bis zu $d^{m-1}y$ inclusive: auf diese Weise erhält man $m-1$ Gleichungen zwischen den Differentialen dc_1, dc_2, ..., dc_m und bekannten Functionen. Indem man nun in der Gleichung (1) die Werthe von y, dy, ..., $d^m y$ substituirt, erhält man eine $m$te Gleichung, welche, in Verbindung mit jenen $m-1$ Gleichungen, die Unbekannten c_1, c_2, ..., c_m vollständig bestimmt.

Diese m Gleichungen sind

$$\begin{aligned} &y_1\, dc_1 + y_2\, dc_2 + \ldots + y_m\, dc_m = 0, \\ &dy_1\, dc_1 + dy_2\, dc_2 + \ldots + dy_m\, dc_m = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d^{m-2} y_1\, dc_1 + d^{m-2} y_2\, dc_2 + \ldots + d^{m-2} y_m\, dc_m = 0, \\ &d^{m-1} y_1\, dc_1 + d^{m-1} y_2\, dc_2 + \ldots + d^{m-1} y_m\, dc_m = V dx^m\,; \end{aligned}$$

und sie können gleichzeitig stattfinden, wenn man von dem allgemeinen Integrale der Gleichung (2) ausgegangen ist. Denn die Coëfficienten von dc_1, ..., dc_m sind genau die Coëfficienten von c_1, ..., c_m in den Ausdrücken für y, dy, ..., $d^{m-1}y$, wenn y das allgemeine Integral der Gleichung (2) bezeichnet, und man kann, für irgend einen Werth von x, den Gleichungen, welche man erhält indem man diese Ausdrücke beliebigen Grössen

gleichsetzt, genügen und daraus endliche Werthe für $c_1, \ldots, c_m$ ziehen. Also enthält auch das System der Gleichungen, in welche $dc_1, \ldots, dc_m$ in derselben Weise wie $c_1, \ldots, c_m$ in jene Gleichungen eingehen, keine Unverträglichkeit. Es wird für diese Unbekannten Werthe liefern von der Form

$$dc_1 = X_1\,dx,\quad dc_2 = X_2\,dx, \ldots,\quad dc_m = X_m\,dx,$$

woraus

$$c_1 = \int X_1\,dx + \alpha_1,\ c_2 = \int X_2 dx + \alpha_2, \ldots, c_m = \int X_m\,dx + \alpha_m,$$

und

$$(3)\qquad y = y_1(\alpha_1 + \int X_1\,dx) + y_2(\alpha_2 + \int X_2\,dx) + \ldots$$
$$+ y_m(\alpha_m + \int X_m\,dx).$$

Dies ist das allgemeine Integral, weil es m willkürliche Constanten enthält.

42. Wenn man nicht m particuläre Integrale der Gleichung (2) kennt, so reducirt sich die Aufgabe nicht unmittelbar auf Quadraturen.

Nehmen wir z. B. an, dass man $m-1$ particuläre Integrale derselben kennt, so kann man nicht mehr als $m-2$ Bedingungen zwischen den $m-1$ Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ aufstellen. Der Ausdruck von $d^{m-1}y$ wird dann $dc_1, \ldots, dc_{m-1}$ enthalten; und $d^m y$ wird $d^2 c_1, \ldots, d^2 c_{m-1}$ enthalten. Die Substitution in der Gleichung (1) wird noch immer $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ verschwinden machen, aber ihre ersten und zweiten Differentiale werden darin eingehen; und da die $m-2$ aufgestellten Gleichungen zwischen $dc_1, dc_2, \ldots, dc_{m-1}$ diese Differentiale als Functionen von dc_1 bestimmen, so erhält man eine lineare Gleichung der zweiten Ordnung, welche dc_1, $d^2 c_1$, aber nicht c_1 enthalten wird. Man bringt dieselbe auf die erste Ordnung herab, ohne dass sie aufhört linear zu sein, indem man $\frac{dc_1}{dx} = z$ setzt. Sie kann immer vollständig integrirt werden, und es gehen auf diese Weise zwei willkürliche Constanten ein. Einfache Quadraturen werden nachher die $m-2$ anderen Grössen $c_2, c_3, \ldots, c_{m-1}$ ergeben, wobei $m-2$ neue willkürliche Constanten eingehen, so dass der Werth von y

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{m-1} y_{m-1}$$

m willkürliche Constanten enthalten, und folglich das allgemeine Integral der Gleichung (1) sein wird.

43. Wenn man nur $m-2$ Integrale der Gleichung (2) gekannt hätte, so hätte man nur $m-3$ Relationen zwischen $c_1, c_2, \ldots, c_{m-2}$ aufstellen können, und die Gleichung (1) würde nach der Substitution dritte Differentiale enthalten haben. Die Elimination von $c_2, \ldots, c_{m-2}$ würde eine lineare Gleichung der dritten Odnung mit dc_1, $d^2 c_1$, $d^3 c_1$, aber ohne c_1 ergeben haben. Man könnte sie also wieder auf die zweite Ordnung herabbringen, ohne dass sie aufhörte linear zu sein; und wenn man sie vollständig integriren könnte, so würde man daraus, wie in dem vorigen Falle, das allgemeine Integral der Gleichung (1) ableiten. Durch dieselben Schlüsse sieht man, dass wenn man $m-n$ particuläre Integrale der Gleichung (2) kennt, die vollständige Integration der Gleichung (1), und um so mehr der Gleichung (2), sich reducirt auf diejenige einer linearen Gleichung von der Ordnung n und auf einfache Quadraturen.

44. Man kann leicht beweisen, dass das allgemeine Integral der Gleichung

$$(a) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

nothwendig von der Form ist

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m.$$

In der That, es sei y_1 eine Auflösung dieser Gleichung; setzen wir voraus, dass dieselbe keine willkürliche Constante enthält, was man immer thun kann, weil wenn deren darin vorkämen, man ihnen nur besondere Werthe beizulegen brauchte. Die Gleichung (a) lässt auch die Auflösung zu

$$y = cy_1,$$

während c eine willkürliche Constante. Betrachtet man jetzt c als eine Function von x, so hat man

$$\begin{aligned} dy &= y_1\,dc + c\,dy_1, \\ d^2 y &= y_1\,d^2 c + 2\,dy_1\,dc_1 + c\,d^2 y_1, \\ d^m y &= y_1\,d^m c + m\,dy_1\,d^{m-1} c + \ldots + c\,d^m y_1. \end{aligned}$$

Indem man in der Gleichung (a) substituirt, so verschwinden die mit c multiplicirten Glieder, und man hat eine lineare Gleichung von der Form

$$\frac{d^m c}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} c}{dx^{m-1}} + \ldots + T_1 \frac{dc}{dx} = 0,$$

oder, indem man $\frac{dc}{dx} = u$ setzt,

$$(b) \qquad \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + A_1 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \ldots + T_1 u = 0.$$

Es sei u_1 eine Auflösung dieser Gleichung, ohne willkürliche Constante, so wird $c' u_1$ auch eine Auflösung sein, und man hat

$$c = c' \int u_1 \, dx + c'', \text{ daher } y = c'' y_1 + c' y_1 \int u_1 \, dx.$$

Man hat also eine Auflösung der Gleichung (a) von der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

worin y_2 eine von y_1 verschiedene Function von x ist.

Da man dies auf jede lineare Gleichung anwenden kann, so hat man eine Auflösung der Gleichung (b) von der Form

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2,$$

woraus

$$c = \alpha \int u_1 \, dx + \beta \int u_2 \, dx + \gamma,$$

und folglich

$$y = \alpha y_1 \int u_1 \, dx + \beta y_1 \int u_2 \, dx + \gamma y_1,$$

d. h. die Gleichung (a) hat ein Integral von der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3.$$

Ebenso ist es mit der Gleichung (b), und so fort, bis man für y einen Ausdruck mit m willkürlichen Constanten hat, welcher das allgemeine Integral sein wird.

45. Die vorige Rechnung führt zu dem wichtigen Satze, dass die Gleichung (a) keine singuläre Auflösung haben kann. In der That, nehmen wir an, sie habe eine solche, und bezeichnen wir diese durch y_1, nachdem man zuvor durch irgend welche besondere Werthe die willkürlichen Constanten ersetzt hat, wenn sie deren enthält. Die in der vorigen Nr. gemachten Schlüsse führen wieder zu einem Werthe von y von der Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m,$$

welcher nothwendig das allgemeine Integral sein wird. Aber man erhält y_1, indem man alle Constanten, c_1 ausgenommen, gleich Null macht: y_1 ist also ein particuläres Integral, welche Werthe man auch darin für die Constanten gesetzt hat, und keine singuläre Auflösung, wie angenommen war. Woraus folgt, dass die in der Formel (a) enthaltenen Gleichungen niemals singuläre Auflösungen haben können.

46. Der Fall, wo man ein particuläres Integral der Gleichung (1) kennt. — Kennt man ein particuläres Integral der Gleichung (1), so kann man die Auffindung ihres allgemeinen Integrals zurückführen auf diejenige des allgemeinen Integrals der Gleichung (2).

In der That, es sei u dieses particuläre Integral; man setze $y = u + z$ in der Gleichung (1), so bleibt, indem man die nach der Voraussetzung sich aufhebenden Glieder weglässt,

$$\frac{d^m z}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

und man ist somit auf die Auffindung des allgemeinen Integrals von (2) zurückgeführt.

Als erstes Beispiel sei

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + px + q,$$

worin $A, \ldots, U, a, \ldots, q$ constant sind.

Um ein particuläres Integral zu finden, wird man setzen

$$y = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \ldots + \lambda x + \mu,$$

in der vorgelegten Gleichung substituiren und ihre beiden Glieder identificiren, woraus $n + 1$ Gleichungen hervorgehen, welche die $n + 1$ Unbekannten $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ bestimmen. Man kommt dann auf den Fall zurück, wo das zweite Glied Null ist.

Als zweites Beispiel sei

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = a\cos(nx + p) + b\sin(nx + p);$$

man setze

$$y = \alpha\cos(nx + p) + \beta\sin(nx + p).$$

Substituirt man in der vorgelegten Gleichung, so wird das erste Glied sich nur aus Gliedern zusammensetzen, von denen die einen $\cos(nx + p)$ und die anderen $\sin(nx + p)$, multiplicirt mit Constanten, enthalten. Indem man die Coëfficienten dieser

beiden Ausdrücke in den beiden Gliedern gleich setzt, hat man zwei Gleichungen, welche α, β bestimmen.

Nachdem man auf diese Weise ein particuläres Integral kennt, so ist man auf den Fall zurückgeführt, wo das zweite Glied Null wäre. In ähnlicher Weise verfährt man, wenn das zweite Glied noch ähnliche Terme enthält, worin die Coëfficienten n und p andere sind.

47. Cauchy hat eine Methode gegeben um ein particuläres Integral der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + Uy = F(x)$$

zu finden, wenn man ein solches Integral der folgenden kennt

$$(2) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + A\frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \ldots + Uz = 0,$$

dass man für $x = \alpha$, was auch die Constante α sei, hat

$$z = 0,\ \frac{dz}{dx} = 0, \ldots,\ \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} = 0,\ \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = F(\alpha);$$

und man begreift, dass man immer einen Werth von z finden kann, der diesen Bedingungen genügt, wenn man das allgemeine Integral der Gleichung (2) kennt, welches m willkürliche Constanten enthält.

Es sei $z = f(x, \alpha)$ dieser Werth von z, setzen wir

$$y = \int_0^x f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_0^x z\, d\alpha.$$

Hieraus leiten wir ab

$$\frac{dy}{dx} = f(x, x) + \int_0^x \frac{df(x, \alpha)}{dx}\, d\alpha.$$

Aber nach der Voraussetzung ist $f(\alpha, \alpha)$ Null, was auch α sei; also ist $f(x, x)$ Null, und man hat allein

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dz}{dx}\, d\alpha.$$

Ebenso findet man

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x \frac{d^2 z'}{dx^2}\, d\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \int_0^x \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\,d\alpha,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F(x) + \int_0^x \frac{d^m z}{dx^m}\,d\alpha.$$

Substituirt man nun y und seinen Ableitungen die so erhaltenen Werthe in der Gleichung (1), so wird sie

$$\int_0^x \left(\frac{d^m z}{dx^m} + A\,\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \ldots + Uz\right) d\alpha + F(x) = F(x),$$

was zufolge der Gleichung (2) eine Identität ist.

Es is also $y = \int_0^x z\,d\alpha$ eine Auflösung der Gleichung (1), und man erhält ihr allgemeines Integral, wenn man zu dieser Auflösung das allgemeine Integral der Gleichung (2) addirt.

Formel für die Integrale höherer Ordnungen.

48. Wenn in der Gleichung (1) alle Coëfficienten der linken Seite von A an Null sind, so hat man eine Gleichung von der Form

(1) $$\frac{d^m y}{dx^m} = V,$$

worin V irgend eine Function von x ist. Durch $m$maliges Integriren in Beziehung auf x würde man den folgenden Werth für y erhalten:

$$y = \int^m V dx^m = \int dx \int dx \ldots \int V dx + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m.$$

Aber anstatt wiederholter Quadraturen kann man vermöge einer Formel, welche wir kennen lernen wollen, y durch eine Reihe einfacher, von einander unabhängiger Quadraturen ausdrücken.

Man hat zunächst, indem man theilweise integrirt und die Constanten weglässt,

$$\int^2 V dx^2 = \int dx \int V dx = x \int V dx - \int V x\,dx,$$

$$\int^3 V dx^3 = \frac{1}{1\,.\,2}\left(x^2 \int V dx - 2x \int V x\,dx + \int V x^2\,dx\right).$$

Indem man fortfährt wiederholt zu integriren und die Reductionen ausführt, erkennt man dass die numerischen Coëfficienten dasselbe Gesetz befolgen wie diejenigen der Entwicklung von $(a - b)^n$, und dass man hat

$$\int^n V dx^n =$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}\int V dx - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int Vx\,dx + \ldots \\ \pm\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1.2\ldots p}x^{n-p-1}\int Vx^p dx \mp \ldots \\ \pm\int Vx^{n-1}dx \end{array}\right\}.$$

Um aber diese Formel strenge zu erweisen, nehmen wir an, dass sie wahr sei für einen gewissen Werth von n, und beweisen wir, dass sie noch wahr sein wird für $n + 1$.

Indem man von der letzten Formel ausgeht, findet man durch theilweise Integration

$$\int^{n+1} V dx^{n+1} =$$

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l} x^n\int V dx - \frac{n}{1}x^{n-1}\int Vx\,dx \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int Vx^2\,dx - \ldots \\ \pm\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}x^{n-p}\int Vx^p\,dx \mp \ldots \\ \pm nx\int Vx^{n-1}dx \end{array}\right\}$$

$$-\frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \\ \pm\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\mp\ldots\pm n \end{array}\right\}\int Vx^n dx.$$

Man hat aber

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \pm n \mp 1 = 0;$$

daher

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \ldots \pm n = \pm 1,$$

und die vorhergehende Formel wird

$$\int^{n+1} V dx^{n+1} =$$

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left\{\begin{array}{l} x^n \int V dx - \frac{n}{1} x^{n-1} \int V x\, dx + \ldots \\ \pm \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} x^{n-p} \int V x^p\, dx \mp \ldots \\ \mp \int V x^n dx. \end{array}\right\}$$

Das fragliche Gesetz ist also wahr für den Index $n+1$, wenn es wahr ist für den Index n; und da wir seine Richtigkeit für $n = 2$ erkannten, so ist es bewiesen für alle ganzen Werthe von n.

Daher ist der allgemeine Werth von y, welcher der Gleichung (1) genügt, indem man die Constanten wieder einführt,

$$y = \frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\left\{\begin{array}{l} x^{m-1} \int V dx - \frac{m-1}{1} x^{m-2} \int V x\, dx + \ldots \\ \pm \frac{(m-1)\ldots(m-p)}{1.2\ldots p} x^{m-p-1} \int V x^p\, dx \mp \ldots \\ \pm \int V x^{m-1} dx \end{array}\right\}$$

$$+ c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} + \ldots + c_m.$$

Lineare Gleichungen mit constanten Coëfficienten.

49. Die allgemeinste Form dieser Gleichungen ist

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V.$$

Wenn das zweite Glied V constant ist, so kann man es fortschaffen, indem man y in $y + \frac{V}{U}$ verwandelt; so dass man in diesem Falle nur die Gleichung zu betrachten braucht

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + A \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

Kann man m particuläre Integrale derselben finden, so wird man das allgemeine Integral bilden, indem man jedes von ihnen mit einer willkürlichen Constante multiplicirt und sie addirt. Setzen wir $y = e^{ax}$, während a unbestimmt ist, und substituiren in der Gleichung (1), so kommt

(2) $$a^m + A a^{m-1} + \ldots + T a + U = 0.$$

Man erhält also m particuläre Integrale, indem man für a successive die m Wurzeln dieser Gleichung nimmt. Bezeichnet man dieselben durch $a_1, a_2, \ldots, a_m$ und durch $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürliche Constanten, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (1)

(3) $$y = c_1 e^{a_1 x} + c_2 e^{a_2 x} + \ldots + c_m e^{a_m x}.$$

50. Es ist leicht zu beweisen, dass diese Gleichung in der That das allgemeine Integral der Gleichung (1) giebt. Hierzu braucht man nur darzuthun, dass man für einen besonderen Werth $x = \alpha$ die Constanten so bestimmen kann, dass $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ beliebigen Grössen gleich werden. Man bemerkt zunächst, dass man, da diese Constanten völlig unbestimmt sind, y in die Form bringen kann

(4) $$y = c_1 e^{a_1(x-\alpha)} + c_2 e^{a_2(x-\alpha)} + \ldots + c_m e^{a_m(x-\alpha)},$$

und man hat zur Bestimmung von $c_1, c_2, \ldots, c_m$ die folgenden Gleichungen, worin $y_0, y'_0, \ldots$ die Werthe von y und seinen $m-1$ ersten Ableitungen für $x = \alpha$ sind,

(5) $$\left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2 + \ldots + c_m = y_0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m = y'_0, \\ a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \ldots + a_m^2 c_m = y''_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{m-1} c_1 + a_2^{m-1} c_2 + \ldots + a_m^{m-1} c_m = y_0^{(m-1)}. \end{array}\right.$$

Gleichungen des ersten Grades von dieser Art führen zu Formeln, deren Demonstration hier zu wiederholen wohl nicht unnütz ist.

Multipliciren wir die erste Gleichung mit einer Unbestimmte k, die zweite mit k' etc., und die letzte mit 1, und addiren, so erhalten wir

$$(k + k' a_1 + k'' a_1^2 + \ldots + a_1^{m-1}) c_1 + (k + k' a_2 + k'' a_2^2 + \ldots) c_2 + \ldots$$
$$= k y_0 + k' y_0' + k'' y_0'' + \ldots + y_0^{(m-1)}.$$

Um c_1 zu bestimmen, werden wir die Coëfficienten von $c_2, \ldots, c_m$ gleich Null setzen, was zur Bestimmung von $k, k', \ldots, k^{(m-2)}$ die $m-1$ Gleichungen giebt:

$$\left\{\begin{array}{l} k + k' a_2 + k'' a_2^2 + \ldots + a_2^{m-1} = 0, \\ k + k' a_3 + k'' a_3^2 + \ldots + a_3^{m-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k + k' a_m + k'' a_m^2 + \ldots + a_m^{m-1} = 0. \end{array}\right.$$

Die ersten Glieder dieser Gleichungen sind nichts Anderes als die Werthe, welche das Polynom $k + k' a + k'' a^2 + \ldots + a^{m-1}$, das wir durch $\varphi(a)$ bezeichnen wollen, annimmt, wenn man darin statt a successive alle Wurzeln der Gleichung (2), mit Ausnahme von a_1, setzt: also hat das Polynom $\varphi(a)$ die Wurzeln $a_2, a_3, \ldots, a_m$, und folglich ist

$$\varphi(a) = (a - a_2)(a - a_3) \ldots (a - a_m) = \frac{F(a)}{a - a_1},$$

indem man mit $F(a)$ das erste Glied der Gleichung (2) bezeichnet; hieraus folgt

$$\varphi(a_1) = F'(a_1).$$

Ebenso erhält man, indem man die Coëfficienten von $c_1, c_3, \ldots, c_m$ gleich Null setzt,

$$\varphi(a_2) = F'(a_2),$$

und so fort; so dass, wenn die Gleichung (2) keine gleichen Wurzeln hat, die Nenner der Unbekannten $c_1, c_2, \ldots$, welche $F'(a_1)$, $F'(a_2)$, ... sind, von Null verschieden sein werden, und man folglich den Gleichungen (5) genügen kann; was zu beweisen war. Die Gleichungen (4) oder (3) stellen also in der That das allgemeine Integral dar. Vollenden wir jetzt das auf die Bestimmung dieser Unbekannten, z. B. von c_1, Bezügliche; ihr Werth ist

$$c_1 = \frac{k y_0 + k' y_0' + \ldots + y_0^{(m-1)}}{F'(a_1)}.$$

Es bleibt also nur noch übrig, die Werthe von k, k' ... zu finden; diese resultiren aber aus der Identität

$$k + k' a + k'' a^2 + \ldots + a^{m-1} = \frac{F(a)}{a - a_1}.$$

Man braucht nur den endlichen Quotienten von $F(a)$ durch $a - a_1$ zu entwickeln, die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von a sind dann k, k', ... Die Formeln, welche man so erhält, werden für a_2, a_3, ... passend durch die einfache Substitution dieser verschiedenen Wurzeln statt a_1.

51. Wir beschränken uns in dem Beweise der wirklichen Allgemeinheit des Integrals auf die Untersuchung des allge-

meinen Falles, wo die Wurzeln verschieden sind, und lassen den Fall ausser Acht, wo es gleiche Wurzeln giebt.

Wenn die Gleichung (2) imaginäre Wurzeln hat, so bietet sich der Werth (3) von y unter imaginärer Form dar; aber Nichts ist leichter als ihm eine reelle Form zu geben. Es seien $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ zwei conjugirte Wurzeln der Gleichung (2), so sind die Terme, welche davon in der Formel (3) herrühren von der Form

$$A e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + B e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x},$$

oder

$$e^{\alpha x}\left(A e^{\beta x\sqrt{-1}} + B e^{-\beta x\sqrt{-1}}\right),$$

oder auch

$$e^{\alpha x}\left[A(\cos\beta x + \sqrt{-1}\sin\beta x) + B(\cos\beta x - \sqrt{-1}\sin\beta x)\right].$$

Da nun A und B willkürlich, reell oder imaginär sind, so kann man sie so bestimmen, dass man hat

$$A + B = M,\ (A - B)\sqrt{-1} = N,$$

während M und N willkürliche Constanten sind. Die beiden Terme, welche wir in der Gleichung (3) betrachten, werden dann ersetzt durch

$$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x),$$

und der Werth von y wird unter reeller Form erscheinen.

52. Wenn die Gleichung (2) gleiche Wurzeln hätte, so würden die entsprechenden Terme der Formel (3) sich in einen zusammenziehen, und man würde nicht mehr das allgemeine Integral von (1) haben, weil nicht mehr m willkürliche Constanten vorhanden wären. Aber es ist auch in diesem Falle leicht, das allgemeine Integral zu finden.

Es seien a_1 und a_2 zwei Wurzeln, welche man als gleich voraussetzt. Man kann die Coëfficienten der Gleichung (1) unendlich wenig ändern, in solcher Weise, dass die Gleichung (2) keine gleichen Wurzeln mehr hat, und dass folglich die Formel (3) das allgemeine Integral giebt. Wenn nun die Coëfficienten gegen diejenigen der Gleichung (1) convergiren, so convergirt dieses Integral gegen eine Grenze, welche nothwendig der vorgelegten Gleichung genügt und das allgemeine

Integral derselben sein wird, wenn sie m willkürliche Constanten enthält.

Es sei $a_1 + \delta$ der Werth der Wurzel, welche sich a_1 nähert. Die correspondirenden Terme des Werthes von y sind $c e^{a_1 x} + c' e^{a_1 x + \delta x}$, oder

$$c e^{a_1 x} + c' e^{a_1 x}\left(1 + \delta x + \frac{\delta^2 x^2}{1.2} + \ldots\right),$$

oder, indem man $c + c' = A$, $c'\delta = B$ setzt,

$$A e^{a_1 x} + B x e^{a_1 x} + \frac{\delta B}{1.2} x^2 e^{a_1 x} + \ldots;$$

die Constanten c und c', da sie willkürlich sind, können immer so gewählt werden, dass B und A beliebige endliche Werthe haben, wie klein auch δ sei. Indem also δ sich der Null nähert, convergirt die Summe der Glieder, welche wir betrachten, gegen die Grenze $A e^{a_1 x} + B x e^{a_1 x}$, und die Formel (3) verwandelt sich in

(6) $$y = e^{a_1 x}(A + Bx) + c_3 e^{a_3 x} + \ldots + c_m e^{a_m x}.$$

Dieser Werth von y ist das allgemeine Integral, weil er m willkürliche Constanten enthält.

53. Wenn drei Wurzeln gleich wären, so würde man sich zunächst die Gleichung so modificirt denken, dass nur zwei Wurzeln gleich wären, was zu der Formel (6) führen würde; man würde a_3 durch $a_1 + \delta$ ersetzen, und erhalten

$$y = e^{a_1 x}\left[(A + c_3) + (B + c_3\delta)x + c_3\delta^2\frac{x^2}{1.2} + c_3\frac{\delta^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right] + \ldots.$$

Da nun A, B, c_3 willkürlich sind, so kann man setzen

$$\frac{c_3\delta^2}{1.2} = C',\quad B + c_3\delta = B',\quad A + c_3 = A',$$

während A', B', C' neue willkürliche Constanten sind; und indem man δ gegen Null convergiren lässt, erhält man das allgemeine Integral

$$y = e^{a_1 x}(A' + B'x + C'x^2) + c_4 e^{a_4 x} + \ldots + c_m e^{a_m x}.$$

In derselben Weise würde man fortfahren, wenn eine vierte Wurzel gleich a_1 wäre, und man sieht, dass man allgemein, wenn n Wurzeln gleich a_1 werden, zum allgemeinen Integral erhält

(7) $$y = e^{a_1 x}(A' + B'x + C'x^2 + \ldots + P'x^{n-1}) + c_{n+1}\, e^{a_{n+1} x} + \ldots + c_m\, e^{a_m x}.$$

54. Man kann das allgemeine Integral noch auf eine andere Weise bestimmen, wenn n Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einen und denselben Werth a haben. Man kennt dann unmittelbar nur $m - n + 1$ particuläre Integrale, und es liegt also der in einer der früheren Nummern behandelte Fall vor.

Es sei Ce^{ax} der Term, auf welchen sich n Terme der Gleichung (3) reduciren; indem wir C als Function von x betrachten, erhalten wir

$$\frac{d^m y}{dx^m} = C a^m e^{ax} + m a^{m-1} \frac{dC}{dx} e^{ax} + \ldots + \frac{d^m C}{dx^m} e^{ax},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{dy}{dx} = C a e^{ax} + \frac{dC}{dx} e^{ax},$$

$$y = Ce^{ax}.$$

Substituirt man in der Gleichung (1), so verschwinden die Terme, welche C enthalten, zufolge der Gleichung (2); diejenigen, welche $\frac{dC}{dx}$ enthalten, verschwinden, sowie die folgenden bis inclusive zu denjenigen, worin $\frac{d^{n-1}C}{dx^{n-1}}$ vorkommt, weil die Wurzel a die $n-1$ ersten Ableitungen der Gleichung (2) zu Null macht. Es bleibt daher eine Gleichung übrig, welche die Ableitungen von C, von der $n$ten bis zur $m$ten, enthält. Das allgemeine Integral derselben würde m willkürliche Constanten enthalten; wir bedürfen aber nur eines ihr genügenden Werthes von C mit n Constanten, und diesen erhalten wir, indem wir setzen

$$\frac{d^n C}{dx^n} = 0, \text{ woraus } C = A' + B'x + \ldots + P'x^{n-1};$$

was aufs Neue zu der Formel (7) führt.

55. Wenn das zweite Glied V eine Function von x ist, so kann man es zuerst vernachlässigen und die Gleichung (1) integriren, wie wir es gethan haben; nachher betrachtet man die Constanten als Functionen von x und erhält die vollständige Auflösung der vorgelegten Gleichung durch das früher angezeigte Verfahren. Wir bemerken nur, dass wenn einige der Wurzeln $a_1, \ldots, a_m$ imaginär oder gleich wären, es zweck-

mässig sein würde, das Integral der Gleichung (1) mit den in diesen Fällen angegebenen Modificationen anzuwenden.

Man kann diese Gleichung auch durch die Methode von Cauchy integriren, was wir thun wollen, um ein Beispiel dieser Methode zu geben. Es sei

$$\frac{d^m y}{dx^m} + A\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + T\frac{dy}{dx} + Uy = F(x).$$

Indem man das zweite Glied vernachlässigt, wird das allgemeine Integral von der Form sein

$$y = c_1 e^{a_1(x-\alpha)} + c_2 e^{a_2(x-\alpha)} + \ldots + c_m e^{a_m(x-\alpha)},$$

wo α eine nach Belieben gewählte Constante ist, und $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$a^m + A a^{m-1} + \ldots + Ta + U = 0$$

sind, die wir sämmtlich als ungleich voraussetzen. Man muss zunächst die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_m$ durch die Bedingung bestimmen, dass man für $x = \alpha$ habe

$$y = 0,\ \frac{dy}{dx} = 0, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = F(\alpha);$$

man wird dadurch zu den folgenden m Gleichungen geführt:

$$\begin{aligned}
&c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 0,\\
&a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_m c_m = 0,\\
&a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2 + \ldots + a_m^2 c_m = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_1^{m-1} c_1 + a_2^{m-1} c_2 + \ldots + a_m^{m-1} c_m = F(\alpha).
\end{aligned}$$

Wir haben oben gesehen, wie diese Gleichungen aufgelöst werden, und man findet, indem man

$$a^m + A a^{m-1} + \ldots + Ta + U = f(a)$$

setzt,

$$c_1 = \frac{F(\alpha)}{f'(a_1)},\ c_2 = \frac{F(\alpha)}{f'(a_2)}, \ldots, c_m = \frac{F(\alpha)}{f'(a_m)}.$$

Der oben stehende Werth von y wird daher

$$\frac{e^{a_1 x}}{f'(a_1)} F(\alpha) e^{-a_1\alpha} + \frac{e^{a_2 x}}{f'(a_2)} F(\alpha) e^{-a_2\alpha} + \ldots$$
$$+ \frac{e^{a_m x}}{f'(a_m)} F(\alpha) e^{-a_m\alpha}.$$

Diesen Ausdruck muss man jetzt in Beziehung auf α zwischen den Grenzen 0 und x integriren, und dann das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d^m y}{d x^m} + A \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \ldots + U y = 0$$

hinzu addiren, welches, wenn man durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ willkürliche Constanten bezeichnet, ist

$$y = \alpha_1 e^{a_1 x} + \alpha_2 e^{a_2 x} + \ldots + \alpha_m e^{a_m x}.$$

Folglich ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung

$$y = e^{a_1 x}\left(\alpha_1 + \frac{1}{f'(a_1)} \int_0^x e^{-a_1 \alpha} F(\alpha)\, d\alpha\right) + \ldots$$
$$+ e^{a_m x}\left(\alpha_m + \frac{1}{f'(a_m)} \int_0^x e^{-a_m \alpha} F(\alpha)\, d\alpha\right).$$

56. Die linearen Gleichungen von der Form

$$\frac{d^m y}{d x^m} + \frac{A}{a x + b} \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \ldots + \frac{N}{(a x + b)^n} \frac{d^{m-n} y}{d x^{m-n}} + \ldots$$
$$+ \frac{U y}{(a x + b)^m} = 0$$

lassen sich allgemein integriren, indem man $y = (a x + b)^\alpha$ setzt. Man findet substituirend

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)\, a^m + A\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+2)\, a^{m-1} + \ldots$$
$$+ U = 0.$$

Diese Gleichung liefert für α m Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; und wenn man durch $c_1, c_2, \ldots, c_m$ willkürliche Constanten bezeichnet, so wird das allgemeine Integral sein

$$y = c_1 (a x + b)^{\alpha_1} + c_2 (a x + b)^{\alpha_2} + \ldots + c_m (a x + b)^{\alpha_m}.$$

Der Fall, wo man für α imaginäre oder gleiche Werthe erhält, ist wie in den vorigen Aufgaben zu behandeln.

57. Kennt man das allgemeine Integral irgend einer Gleichung von der Ordnung m

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{d x^m}\right) = 0,$$

oder, indem man $\frac{dy}{dx} = y', \ldots, \frac{d^m y}{d x^m} = y^{(m)}$ setzt,

(1) $$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}) = 0,$$

so kann man eine lineare Gleichung der $m$ten Ordnung mit

variablen Coëfficienten bilden, deren allgemeines Integral sich unmittelbar ausdrücken lässt.

In der That, es sei

(2) $$y = \varphi(x, a, b, \ldots, l)$$

das Integral der Gleichung (1) mit m Constanten $a, b, \ldots, l$. Substituirt man diesen Werth und diejenigen, welche daraus für y', y'' etc. folgen, so wird die Gleichung (1) identisch, was auch x, a, b, ..., l seien. Differentiirt man sie daher nach dieser Substitution in Bezug auf eine der Constanten, a z. B., so wird das Resultat wieder eine Identität in x, a, b, ..., l sein. Man hat also

(3) $$\frac{dF}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{da} + \frac{dF}{dy''}\frac{dy''}{da} + \cdots + \frac{dF}{dy^{(m)}}\frac{dy^{(m)}}{da} = 0,$$

d. h. diese Gleichung wird identisch in $x, a, b, \ldots, l$, wenn man für y und seine Ableitungen die durch die Gleichung (2) gegebenen Werthe setzt.

Setzen wir jetzt $\frac{dy}{da} = u$, so folgt

$$\frac{dy'}{da} = \frac{du}{dx},\ \frac{dy''}{da} = \frac{d^2u}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{dy^{(m)}}{da} = \frac{d^m u}{dx^m},$$

weil x und a unabhängig sind.

Die Gleichung (3) wird nun

(4) $$\frac{dF}{dy}u + \frac{dF}{dy'}\frac{du}{dx} + \cdots + \frac{dF}{dy^{(m)}}\frac{d^m u}{dx^m} = 0.$$

Wenn man jetzt alle Coëfficienten $\frac{dF}{dy}, \ldots, \frac{dF}{dy^{(m)}}$ durch x, $a, b, \ldots, l$ vermöge der Gleichung (2) ausdrückt, so erhält man eine lineare Gleichung der Ordnung m mit variablen Coëfficienten, und man kennt von ihr schon ein Integral, nämlich $\frac{d\varphi(x, a, b, \ldots, l)}{da}$. Differentiirt man die Gleichung (1) in Bezug auf irgend eine der anderen Constanten $b, \ldots, l$ so gelangt man zu derselben Gleichung (4), aber u bedeutet die partielle Ableitung von $\varphi(x, a, b, \ldots, l)$ nach dieser anderen Constante. Auf diese Weise bildet man m particuläre Integrale der Gleichung (4), und indem man dieselben mit willkürlichen Constanten $A, B, \ldots, L$ multiplicirt, liefert ihre Summe das allgemeine Integral dieser Gleichung, dessen Ausdruck also ist

$$u = A\frac{d\varphi}{da} + B\frac{d\varphi}{db} + \ldots + L\frac{d\varphi}{dl}.$$

Kennt man nur ein particuläres Integral der Gleichung (1) mit weniger als m Constanten, so kann man daraus ein particuläres Integral der Gleichung (4) mit einer gleichen Anzahl von Constanten ableiten.

Wenn die Gleichung (1) linear ist, so hat die Gleichung (4) dieselben Coëfficienten und enthält kein von der Function u unabhängiges Glied; sie steckt also in der ersten, und man wird zu nichts Neuem geführt.

Transformationen, um die Ordnung der Gleichungen zu erniedrigen.

---

58. Jede lineare Gleichung der Ordnung m von der Form

$$\frac{d^m y}{d x^m} + A \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}} + \dots + P y = 0$$

lässt sich auf die Ordnung $m-1$ herabbringen, indem man setzt

$$y = e^{\int t dx}.$$

In der That, man hat dann

$$\frac{dy}{dx} = t e^{\int t dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} = t^2 e^{\int t dx} + \frac{dt}{dx} e^{\int t dx}, \dots;$$

beim Substituiren in der vorgelegten verschwindet der Factor $e^{\int t dx}$, und die Gleichung wird von der Ordnung $m-1$ in t; aber sie ist nicht mehr linear.

Es sei z. B.

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + A \frac{dy}{dx} + By = 0,$$

so erhält man

$$\frac{dt}{dx} + t^2 + At + B = 0.$$

59. Betrachten wir jetzt eine Gleichung, worin weder x noch y, sondern nur irgend zwei consecutive Ableitungen vorkommen:

$$F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 .$$

Man setze $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$, so folgt $F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$; daraus zieht man

$$dx = f(p)\,dp \text{ und } x = \int f(p)\,dp + C = \varphi(p) .$$

Kann man diese Gleichung in Beziehung auf p auflösen, so kennt man $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ als Function von x, und durch eine Reihe von Quadraturen erhält man y als Function von x und n willkürlichen Constanten. Kann man sie dagegen nicht auflösen, so erhält man in folgender Weise y als Function von p.

Die Gleichung $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p$ giebt

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int p\,dx = \int p f(p)\,dp + C' ;$$

indem man wiederholt nach x integrirt, und im zweiten Gliede dx durch $f(p)\,dp$ ersetzt, gelangt man durch eine Reihe von Quadraturen zu $y = \psi(p)$.

Die Elimination von p zwischen dieser Gleichung und $x = \varphi(p)$ liefert eine Gleichung zwischen y, x und n willkürlichen Constanten, welche das allgemeine Integral der vorgelegten ist.

60. Wenn man z. B. die Curve verlangte, deren Krümmungsradius gleich einer Constante a ist, so müsste man die Gleichung integriren

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a ,$$

oder, indem man $\frac{dy}{dx} = p$ setzt,

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a ;$$

woraus

$$dx = \frac{a\,dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ und } x = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + C .$$

Man könnte diese Gleichung in Bezug auf p auflösen, aber einfacher wird man y als Function von p ausdrücken; man hat

$$y = \int p\,dx = a\int \frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C_1 .$$

Da man so zwei erste Integrale der vorgelegten Gleichung kennt, so braucht man nur p zwischen ihnen zu eliminiren, um das allgemeine Integral zu erhalten, welches ist

$$(x-C)^2 + (y-C_1)^2 = a^2 :$$

die Gleichung eines Kreises vom Radius a und den willkürlichen Mittelpunktscoordinaten C, C_1.

61. Betrachten wir noch den Fall, wo die Ordnungen der beiden Ableitungen sich um zwei Einheiten unterscheiden,

$$F\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 ;$$

indem man $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$ setzt, kommt

$$F\left(p, \frac{d^2p}{dx^2}\right) = 0, \quad \text{woraus} \quad \frac{d^2p}{dx^2} = f(p) ;$$

durch Multipliciren mit $2\,dp$ und Integriren kommt

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2\int f(p)\,dp + C ;$$

woraus

$$dx = \varphi(p)\,dp , \quad x = \psi(p) ,$$

während $\psi(p)$ zwei willkürliche Constanten enthält.

Kann man diese Gleichung in Bezug auf p auflösen, so erhält man y durch $n-2$ Quadraturen, welche $n-2$ neue willkürliche Constanten einführen; kann man es nicht, so erhält man y als Function von p, indem man $n-2$ mal die Gleichung $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$ integrirt, nachdem man jedesmal das erste Glied mit dx und das zweite mit dem ihm gleichen $\varphi(p)\,dp$ multiplicirt hat. Der Ausdruck von y wird auf diese Weise $n-2$ willkürliche Constanten enthalten, und die Elimination von p zwischen den Gleichungen, welche x und y geben, wird zu einer Gleichung zwischen x, y und n Constanten führen, welche das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ist.

62. Allgemein, wenn man hat

$$F\left(x, \frac{d^n y}{d x^n}, \ldots, \frac{d^m y}{d x^m}\right) = 0,$$

so wird man die Ordnung um n Einheiten herabbringen, indem man setzt $\frac{d^n y}{d x^n} = p$, und wenn man die Gleichung

$$F\left(x, p, \ldots, \frac{d^{m-n} p}{d x^{m-n}}\right) = 0$$

integriren, und dann in Bezug auf x oder p auflösen kann, so wird man die Gleichung zwischen x und y durch dieselben Mittel wie in den vorigen Fällen erhalten.

Wenn die Gleichung ist

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{d x^m}\right) = 0,$$

so kann man sie durch Vertauschung der unabhängigen Variable auf die Form reduciren

$$F\left(y, \frac{dx}{dy}, \ldots, \frac{d^m x}{d y^m}\right) = 0$$

und nun erniedrigen, indem man $\frac{dx}{dy} = p$ setzt.

63. Wenn die Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

homogen ist in Bezug auf die Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots,$ so kann man ihre Ordnung um eine Einheit erniedrigen.

In der That, indem man durch eine angemessene Potenz von y theilt, wird man ihr die Form geben

$$f\left(x, \frac{\frac{dy}{dx}}{y}, \frac{\frac{d^2 y}{d x^2}}{y}, \ldots\right) = 0.$$

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = y t$ oder was dasselbe ist, $y = e^{\int t dx}$, so folgt

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = y\left(\frac{d t}{d x} + t^2\right),$$
$$\frac{d^3 y}{d x^3} = y\left(\frac{d^2 t}{d x^2} + 3 t \frac{d t}{d x} + t^3\right), \ldots;$$

y ist Factor in allen Ableitungen, und die obige Gleichung geht durch diese Substitutionen über in eine Gleichung von der Ordnung $m - 1$ zwischen x und t.

64. Giebt man die Gleichung einer Curve, welche den Bogen s enthält, und wird diejenige gesucht, welche zwischen x und y allein stattfindet, so muss man die gegebene Gleichung differentiiren, ds durch $\sqrt{dx^2+dy^2}$ ersetzen und s zwischen dieser und der ersten Gleichung eliminiren; man erhält so eine Differentialgleichung zwischen x und y allein. Wenn die gegebene Gleichung in Bezug auf s aufgelöst ist, so hat man nach der Differentiation keine Elimination zu machen.

Es sei z. B. $s^2 = ay$, woraus man zieht

$$s = a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}.$$

Differentiirend, kommt

$$\frac{ds}{dy} = \tfrac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}};$$

man zieht hieraus

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{a}{4y} - 1},$$

die Gleichung einer auf ihren Scheitel bezogenen Cycloide, welche durch einen Kreis von dem Radius $\frac{a}{8}$ erzeugt wird.

Wenn man eine Gleichung von der Form gäbe

$$s = F\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

so würde man setzen

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ woraus } s = F(p).$$

Durch die Differentiation erhält man

$$\frac{ds}{dx} = F'(p)\frac{dp}{dx} = \sqrt{1+p^2};$$

woraus man zieht

$$dx = \frac{F'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$dy = p\,dx = \frac{p\,F'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Kann man diese beiden Quadraturen ausführen, so findet man die Gleichung zwischen x und y, indem man p zwischen den zwei erhaltenen Gleichungen eliminirt. Wenn die eine dieser zwei Gleichungen in Bezug auf p aufgelöst werden kann, so

braucht man die andere nicht zu kennen, weil man den Werth $\frac{dy}{dx}$ als Function von x oder von y kennt, und folglich die endliche Gleichung zwischen x und y durch eine einfache Quadratur erhält. Es sei z. B.

$$s = a \, arc \, tang \frac{dy}{dx} \, .$$

Die Differentiation giebt die Gleichung

$$dx = \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \, ,$$

und folglich

$$dy = \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \, .$$

Diese letzte integrirt sich unmittelbar, und giebt

$$y - c = - a\,(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \, ,$$

woraus

$$dx = \frac{(y-c)\,dy}{\sqrt{a^2 - (y-c)^2}} \, ,$$

und, integrirend,

$$(x - c')^2 + (y-c)^2 = a^2 \, .$$

Es ist dies die Gleichung eines irgend wie gelegten Kreises vom Radius a. Um der gegebenen Gleichung zu genügen muss man zum Anfangspunkte der Bogen einen der zwei Punkte nehmen, worin die Tangente parallel ist zur Axe der x, damit man habe $s = 0$, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$.

Integration der homogenen Gleichungen in x, y, dx, dy, d^2y.

65. Es sei

$$(1)\qquad F(x, y, dx, dy, d^2y) = 0$$

eine Gleichung dieser Art, deren Terme alle endlich, oder unendlich klein von derselben Ordnung sind.

Setzen wir

$$y = ux, \quad dy = p\,dx, \quad d^2y = \frac{q}{x}\,dx^2 .$$

Indem man zunächst diese Substitutionen in der Gleichung (1) macht, so verschwinden y und seine Differentiale, und alle Terme werden homogen in Bezug auf x und dx. In der That, sie waren es ursprünglich in Bezug auf x, dx, y, dy, d^2y, und man hat diesen drei letzten Grössen homogene Ausdrücke der ersten Ordnung in Bezug auf x und dx substituirt. Und da alle Terme von derselben infinitesimalen Ordnung sein müssen, so verschwindet nothwendig dx, und folglich x. Also wird die erhaltene Gleichung von der Form sein

$$(2)\qquad f(u, p, q) = 0 ,$$

und wird ergeben

$$q = \varphi(p, u) .$$

Man kann aber $\frac{dx}{x}$ auf zweierlei Weise durch u und p ausdrücken; denn man hat

$$u\,dx + x\,du = p\,dx ,$$

daher

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

und andererseits hat man

$$\frac{q}{x} = \frac{dp}{dx}, \text{ und folglich } \frac{dx}{x} = \frac{dp}{q} = \frac{dp}{\varphi(p, u)}.$$

Indem man beide Werthe von $\frac{dx}{x}$ gleich setzt, kommt

(3) $$\frac{du}{p-u} = \frac{dp}{\varphi(p, u)},$$

eine Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche integrirt geben wird

$$p = \psi(u, c),$$

während c eine willkürliche Constante bezeichnet.

Es ist dann leicht, x als Function von u zu finden, weil man hat

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\psi(u, c) - u},$$

woraus, indem man durch c' eine neue willkürliche Constante und durch $l\chi(u, c)$ das Integral des zweiten Gliedes bezeichnet,

$$x = c'\chi(u, c);$$

und da $u = \frac{y}{x}$, so hat man

$$x = c'\chi\left(\frac{y}{x}, c\right),$$

und man kennt somit das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

66. Wenn das zweite Glied der Gleichung (3) die Form hat

$$\frac{u\,dp}{\varphi(p)},$$

so ersetzt man die Gleichung (3) durch folgende:

$$\frac{dx}{x} = \frac{u\,dp}{\varphi(p)},$$

welche, indem man mit $\frac{p}{u}$ multiplicirt, wird

$$\frac{dy}{y} = \frac{p\,dp}{\varphi(p)},$$

woraus man zieht

$$ly = \int \frac{p\,dp}{\varphi(p)} .$$

Indem man die Integration ausführt, und durch c eine willkürliche Constante bezeichnet, bringt man y in die Form

$$y = c\,\psi(p) .$$

Wenn man in Bezug auf p auflösen kann, so führt man die Gleichung auf die Form zurück

$$dx = \chi(y)\,dy ,$$

und integrirt beide Glieder; wenn nicht, so zieht man aus den vorigen Gleichungen

$$dy = \frac{py\,dp}{\varphi(p)} = \frac{cp\,\psi(p)\,dp}{\varphi(p)} = p\,dx ,$$

woraus

$$x = c\int \frac{\psi(p)\,dp}{\varphi(p)} ,$$

und man eliminirt p zwischen dieser Gleichung und $y = c\,\psi(p)$.

67. Eine Anwendung dieser Methode werden wir in der folgenden Aufgabe finden: Die Curve zu bestimmen, in welcher der Krümmungsradius proportional der Normale ist.

Man erhält unmittelbar die Differentialgleichung

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \mp\, my\,\frac{d^2y}{dx^2} ,$$

wo m das Verhältniss des Krümmungsradius zur Normale ist. Das obere Zeichen bezieht sich auf den Fall, wo der Krümmungsradius in dem Sinne der Normale liegt, und das untere Zeichen auf den Fall, wo er im entgegengesetzten Sinne liegt.

Indem man setzt

$$y = ux , \quad dy = p\,dx , \quad d^2y = \frac{q}{x}\,dx^2 ,$$

erhält man

$$1 + p^2 = \mp\, muq , \quad \text{woraus } q = \frac{1+p^2}{\mp\, mu} ,$$

und folglich

$$\frac{du}{p-u} = \mp\,\frac{mu\,dp}{1+p^2} ,$$

eine Gleichung, die nicht in denjenigen enthalten ist, welche wir integrirt haben. Aber nach der in der vorigen Nummer

gemachten Bemerkung wird man sie durch die folgende ersetzen:

$$\frac{dx}{x} = \mp \frac{mu\,dp}{1+p^2},$$

woraus man successive herleitet

$$\frac{dx}{y} = \mp \frac{m\,dp}{1+p^2}, \quad \frac{dy}{y} = \mp \frac{mp\,dp}{1+p^2},$$

$$l\,\frac{y}{c} = \mp \frac{m}{2}\, l(1+p^2) = l(1+p^2)^{\mp\frac{m}{2}},$$

$$y = c(1+p^2)^{\mp\frac{m}{2}},$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp\frac{2}{m}} - 1} = \frac{dy}{dx},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp\frac{2}{m}} - 1}}.$$

Es giebt besondere Werthe von m, welche diese Integration möglich machen, nämlich $m = 2$, $m = 1$. Untersuchen wir successive diese beiden Fälle.

1. Es sei $m = 2$, so hat man

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp 1} - 1}}.$$

Indem man das obere Zeichen nimmt, hat man

$$dx = dy\sqrt{\frac{y}{c-y}},$$

die Gleichung einer Cycloide, deren Basis auf der Axe der x liegt, und deren Erzeugungskreis den Radius $\frac{c}{2}$ hat, dessen Werth willkürlich ist. Und in der That, man weiss, dass in jeder so gelegten Cycloide der Krümmungsradius das Doppelte der Normale ist.

Indem man das untere Zeichen nimmt, hat man

$$dx = \frac{\sqrt{c}\,dy}{\sqrt{y-c}},$$

woraus

$$x - c' = 2\sqrt{c}\,(y - c)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$y - c = \frac{(x - c')^2}{4c},$$

die Gleichung einer Parabel, deren Axe senkrecht ist auf der Axe der x.

Da die Normale sich auf eine gegebene Gerade bezieht, welche man zur Axe der x genommen hat, so muss man, wenn man diese Axe vertauscht, sich erinnern, dass die Normale bis zu der gegebenen Gerade verlängert werden muss, und nicht bis zur neuen Axe der x. Aber man kann den Anfang nehmen in welchem Punkte der gegebenen Linie man will, z. B. in demjenigen, dessen Abscisse c' ist, was darauf hinauskommt, dass man $c' = 0$ macht; man hat so

$$y - c = \frac{x^2}{4c},$$

und es ist leicht zu verificiren, dass, was auch c sei, die durch diese Gleichung dargestellte Parabel einen Krümmungsradius hat, der doppelt so gross als die Normale und im entgegengesetzten Sinne gerichtet ist.

2. Es sei $m = 1$; die Differentialgleichung der Curve wird

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp 2} - 1}}.$$

Nimmt man das obere Zeichen, so kommt

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}};$$

woraus

$$x - c' = -\sqrt{c^2 - y^2},$$

oder

$$y^2 + (x - c')^2 = c^2,$$

die Gleichung irgend eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der Axe der x liegt. Und in der That sieht man, dass dann der Krümmungsradius immer gleich der Normale und in demselben Sinne gerichtet ist. Nimmt man das untere Zeichen, so findet man

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

daher

$$x - c' = c\,l\,\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}.$$

Indem man $x - c'$ durch x ersetzt, erhält man

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = c\,e^{\frac{x}{c}},$$

was sich reducirt auf

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right);$$

dies ist die Curve, welche man Kettenlinie nennt: sie liegt symmetrisch in Bezug auf die Axe der y, und ihr Scheitel liegt in der Entfernung c von der Axe der x. Man verificirt leicht, dass ihr Krümmungsradius gleich der Normale und in entgegengesetztem Sinne gerichtet ist.

Eine der eben behandelten Gleichungen kann einfacher durch eine besondere Betrachtung integrirt werden: diejenige nämlich, welche man für $m = 1$ und das obere Zeichen erhält; man hat dann

$$y\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d\,y^2}{dx^2} + 1 = 0;$$

da die beiden ersten Glieder die Ableitung von $y\,\frac{dy}{dx}$ bilden, so hat man, integrirend,

$$y\,\frac{dy}{dx} + x - c = 0,$$

und neuerdings integrirend

$$y^2 + (x - c)^2 = c',$$

welche Gleichung sich nicht von der schon gefundenen unterscheidet.

Elimination der Variablen zwischen den simultanen Differentialgleichungen. Integration dieser Gleichungen.

68. Betrachten wir zunächst zwei Gleichungen mit drei Variablen x, y, z, so kann man immer voraussetzen, dass die Ableitungen genommen sind in Bezug auf dieselbe unabhängige Variable, x z. B.; y und z sind dann Functionen von x, welche man bestimmen soll, und wir werden damit anfangen, dass wir die Entwicklung in Reihen darauf anwenden.

Man kann immer annehmen, dass man aus diesen Gleichungen die Werthe der höchsten Differentialcoëfficienten von y und z zieht, wenn sie in jeder der beiden Gleichungen vorkommen. Jedoch muss man den besonderen Fall ausnehmen, wo die Elimination des einen zu gleicher Zeit den anderen verschwinden macht. Die beiden Gleichungen können also, im Allgemeinen, in der Form gedacht werden

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, z, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right),$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = F_1\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, z, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right);$$

nimmt man willkürlich die Werthe von $y, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$, $z, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$ für $x = 0$ an, so werden sie dazu dienen, alle folgenden Ableitungen von y und z für den Werth $x = 0$ auszudrücken, und man wird folglich y und z durch die Formel von Maclaurin entwickeln können. Man

sieht, dass ihre Ausdrücke $m + n$ willkürliche Constanten enthalten werden. Statt des besonderen Werthes $x = 0$, kann man irgend einen anderen x_0 wählen und die Reihe von Taylor anwenden.

Wenn mit der Elimination von $\frac{d^m y}{d x^m}$ auch zugleich $\frac{d^n z}{d x^n}$ wegfällt, so wird die zweite der vorigen Gleichungen von einer niedrigeren als der Ordnung n. Dieser Fall steckt in demjenigen, welchen wir jetzt behandeln werden.

69. Es sei m die höchste Ordnung in Bezug auf y in den beiden Gleichungen. Man ziehe den Werth von $\frac{d^m y}{d x^m}$ aus der einen dieser Gleichungen und substituire ihn in der anderen, wenn diese Ableitung darin vorkommt; es werden dann in dieser letzteren nur noch niedrigere Ordnungen als m in Bezug auf y vorkommen. Daraus ziehe man den Werth der höchsten Ableitung von z, so hat man zwei Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{d x^m} = F\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}}, z, \ldots, \frac{d^n z}{d x^n}\right),$$

$$(2) \qquad \frac{d^{n'} z}{d x^{n'}} = F_1\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m'} y}{d x^{m'}}, z, \ldots, \frac{d^{n'-1} z}{d x^{n'-1}}\right);$$

in welchen $m > m'$, und $n < n'$ oder $n > n'$.

1. Es sei $n < n'$; nehmen wir willkürlich die Werthe von $y, \ldots, \frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}}, z, \ldots, \frac{d^{n'-1} z}{d x^{n'-1}}$ für $x = 0$; alle höheren Ableitungen sind für denselben Werth $x = 0$ vermöge dieser Werthe und der Gleichungen (1) und (2) bekannt, so dass man die Entwicklung von y und z ausführen kann. Die Anzahl der eingehenden willkürlichen Constanten ist $m + n'$, und im gegenwärtigen Falle hat man $m + n' > m' + n$.

2. Es sei $n > n'$; die Entwicklung von y verlangt, dass man die Werthe von $z, \ldots, \frac{d^n z}{d x^n}$ für $x = 0$ kennt. Aber von der Ordnung n' an, müssen sie aus der Gleichung (2) und ihren Ableitungen bis zur Ordnung n in z gezogen werden; was zu der Ordnung $m' + n - n'$ in y führen wird. Wenn man nun $m' + n - n' > m$ hätte, so würde die Glei-

chung (1) $\frac{d^m y}{dx^m}$ durch Ableitungen von höherer Ordnung als m, und diese durch andere noch höhere bestimmen; man könnte dann die Entwicklung von y nicht ausführen. Man muss also haben $m + n' > m' + n$, damit die vorhergehende Rechnung y und z ergeben könne; und in diesem Falle ist die Anzahl der Constanten wieder die grösste von den beiden Zahlen $m + n'$ und $m' + n$.

70. Wenn $m' + n > m + n'$, so findet wenigstens eine von den Ungleichheiten $m' > m$, $n > n'$ statt; es sei z. B. $m' > m$. Man wird dann aus den gegebenen Gleichungen die Werthe von $\frac{d^{m'} y}{dx^{m'}}$ und $\frac{d^n z}{dx^n}$ ziehen und erhalten

$$\frac{d^{m'} y}{dx^{m'}} = f\left(x, y, \ldots, \frac{d^{m'-1} y}{dx^{m'-1}}, z, \ldots, \frac{d^{n'} z}{dx^{n'}}\right),$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = f_1\left(x, y, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}, z, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right);$$

und die Entwicklungen sind nun möglich, weil die Gleichungen mit dem vorigen Falle übereinkommen. Die Anzahl der Constanten ist $m' + n$, also immer die grösste der beiden Zahlen $m' + n$ und $m + n'$.

71. Setzen wir jetzt irgend eine Anzahl von simultanen Gleichungen voraus, welche die Variablen $y, z, u, \ldots$ als Functionen von x bestimmen. Wir betrachten nur den Fall, wo man sie sich aufgelöst denken kann in Bezug auf die Differentialcoëfficienten der respective höchsten Ordnungen in y, z, $u, \ldots$, nämlich

$$\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^n z}{dx^n}, \frac{d^p u}{dx^p}, \ldots.$$

Es ist klar, dass vermöge der gegebenen Gleichungen, welche man immerfort differentiiren wird, es nothwendig und hinreichend ist die Werthe zu kennen, welche $y, z, u, \ldots$ und ihre Ableitungen bis zu den Ordnungen $m-1, n-1, p-1, \ldots$ inclusive annehmen, wenn man darin $x = 0$ macht, um die Entwicklung einer jeden Variable durch die Formel von Maclaurin ausführen zu können. Diese Constanten sind vollkommen willkürlich, und ihre Anzahl ist

$$m + n + p + \ldots.$$

72. Indem wir jetzt die Entwicklungen in Reihen verlassen, wollen wir suchen, alle Functionen bis auf eine zu eliminiren und so die Aufgabe auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung zurückzuführen.

Nehmen wir uns zunächst vor, y zwischen zwei Gleichungen zu eliminiren, in welchen $\frac{d^m y}{dx^m}$ der höchste Differentialcoëfficient von y ist, und $\frac{d^n z}{dx^n}$ der höchste von z. Setzen wir zuerst voraus, dass diese beiden Ausdrücke in jeder Gleichung vorkommen, auf irgend eine Weise combinirt mit den Differentialcoëfficienten der niedrigern Ordnungen, sowie mit y, z und x. Es seien diese Gleichungen

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0.$$

Wenn man diese zwei Gleichungen irgend eine und dieselbe Anzahl mal differentiirt, so wird man eine gleiche Anzahl neuer Ableitungen von y von höherer Ordnung als m und eine doppelte Anzahl von Gleichungen einführen; so dass wenn man m Differentiationen ausführt, man $2m + 2$ Gleichungen haben wird, welche y und seine $2m$ ersten Ableitungen enthalten, und zwischen welchen man alle diese Grössen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra eliminiren kann. Ihr System wird dadurch zurückgeführt auf eine Gleichung von der Ordnung $m+n$ zwischen z und x, woraus man den Werth von z als Function von x und $m + n$ willkürlichen Constanten ziehen kann, und auf $2m + 1$ Gleichungen, in welchen man z und seinen Ableitungen ihre nun bekannten Werthe substituiren wird, so dass sie nur noch y und seine $2m$ ersten Ableitungen enthalten werden. Indem man diese letzten eliminirt, bleibt eine Gleichung übrig zwischen y und x und den $m + n$ willkürlichen Constanten, welche sich in z fanden.

Im Allgemeinen werden also y und z dieselben willkürlichen Constanten enthalten in einer Anzahl, die gleich ist der Summe der Zahlen, welche die höchste Ordnung der Gleichungen in Bezug auf y und z respective anzeigen.

In analoger Weise würde man verfahren und zu gleichen Folgerungen gelangen für irgend eine Anzahl Functionen bei einer gleichen Anzahl von Gleichungen.

73. Es kann aber vorkommen, dass die Differentialcoëfficienten der höchsten Ordnung nicht in den beiden Gleichungen zugleich vorkommen.

Nehmen wir an, dass die Differentialcoëfficienten der höchsten Ordnung in der ersten seien

$$\frac{d^m y}{d x^m}, \quad \frac{d^n z}{d x^n},$$

und in der zweiten

$$\frac{d^{m'} y}{d x^{m'}}, \quad \frac{d^{n'} z}{d x^{n'}}.$$

Man differentiire m'mal die erste Gleichung und $m$mal die zweite. Man wird dann $m + m' + 2$ Gleichungen haben, welche y und seine Ableitungen bis zur Ordnung $m + m'$ enthalten. Man kann also alle diese Grössen eliminiren, und es wird eine Gleichung zwischen z und x übrig bleiben, deren Ordnung die grösste der beiden Zahlen $m + n'$ und $m' + n$ sein wird; und diese Ordnung ist gleich der Anzahl der Constanten, welche in den Werth von z eingehen werden. Indem man z und seinen Ableitungen ihre bekannten Werthe substituirt in den $m + m' + 1$ Gleichungen, kann man die $m + m'$ Ableitungen von y eliminiren, und es wird eine Gleichung übrig bleiben zwischen y, x und den Constanten, welche in z eingehen.

74. Betrachten wir im Besonderen den Fall von m Gleichungen, worin alle Ableitungen von der ersten Ordnung sind und aus ihnen gefunden werden können, ohne dass man auf irgend eine Unverträglichkeit oder Unbestimmtheit stösst; man wird dann haben

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, z, \ldots, u),$$

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z, \ldots, u),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z, \ldots, u);$$

und nach dem Vorhergehenden sind die willkürlichen Constanten die Werthe von $y, z, \ldots, u$ für $x = x_0$. Wenn man die erste $m - 1$ mal differentiirt, und jedesmal den Ableitungen der ersten Ordnung, welche sich einführen, ihre aus den gegebenen Gleichungen gezogenen Werthe substituirt, so wird man erhalten:

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= F(x, y, z, \ldots, u), \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= F_1(x, y, z, \ldots, u), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^m y}{dx^m} &= F_{m-1}(x, y, z, \ldots, u);
\end{aligned}
$$

und man hat nur noch die Variablen $z, \ldots, u$, welche in der Anzahl $m - 1$ sind, zu eliminiren. Daraus wird eine Gleichung der $m$ten Ordnung in y hervorgehen, welche den Werth dieser Variable als Function von x und m willkürlichen Constanten geben wird. Indem man diesen Werth in den $m - 1$ Gleichungen substituirt, welche zusammen mit der Endgleichung das gegebene System ersetzen, wird man daraus $z, \ldots, u$ als Functionen von x und denselben willkürlichen Constanten herleiten.

Bemerkung. — Sind die Integrale dieser Gleichungen auf die Form gebracht

$$\psi(x, y, z, \ldots, u) = c, \quad \psi_1(x, y, z, \ldots, u) = c_1, \ldots,$$

differentiirt man dieselben, und ersetzt $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}$ durch ihre Werthe in $x, y, z, \ldots, u$, so werden die Gleichungen, welche man so erhält, Identitäten sein; denn jeder aus den Integralen und den Gegebenen abgeleiteten Gleichung muss durch willkürliche Werthe $y_0, z_0, \ldots, u_0$, welche einem willkürlichen x_0 für x entsprechen, genügt werden.

Man hat also, was auch $x, y, z, \ldots, u$ seien,

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} F + \frac{d\psi}{dz} f + \cdots + \frac{d\psi}{du} \varphi = 0,$$

und ebenso mit den anderen.

75. Auf diesen letzten Fall kann man denjenigen zurückführen, wo man die Ableitungen

$$\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^n z}{dx^n}, \frac{d^p u}{dx^p}, \ldots$$

durch diejenigen von niedrigerer Ordnung ausdrücken kann.

In der That, wenn man setzt

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots, \quad \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y^{(m-1)},$$

$$\frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{dz'}{dx} = z'', \ldots, \quad \frac{dz^{(n-2)}}{dx} = z^{(n-1)},$$

$$\frac{du}{dx} = u', \quad \frac{du'}{dx} = u'', \ldots, \quad \frac{du^{(p-2)}}{dx} = u^{(p-1)}, \text{ etc.,}$$

so werden die vorgelegten Gleichungen die Werthe von

$$\frac{dy^{(m-1)}}{dx}, \frac{dz^{(n-1)}}{dx}, \frac{du^{(p-1)}}{dx}, \ldots$$

als Functionen von $x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}, z, z', \ldots, z^{(n-1)}, u, u', \ldots, u^{(p-1)}, \ldots$ geben. Indem man diese mit den vorstehenden Gleichungen verbindet, hat man ein aus $m + n + p + \cdots$ Gleichungen der ersten Ordnung zusammengesetztes System, das man integriren wird wie in dem vorigen Falle.

76. Wir haben oben vorausgesetzt, dass die gegebenen Gleichungen der ersten Ordnung in Bezug auf alle Ableitungen aufgelöst werden können, welche sich dann als Functionen der Variablen ausgedrückt finden; es kann sich aber anders verhalten, ohne dass die gegebenen Gleichungen unverträglich sind.

Denkt man sich z. B. die Elimination der Ableitungen in der Weise gemacht, dass man aus einer der m Gleichungen den Werth von $\frac{dy}{dx}$ zieht und ihn in den $(m-1)$ anderen substituirt; dass man darauf $\frac{dz}{dx}$ aus einer dieser letzteren zieht, und in den $(m-2)$ anderen substituirt, und so fort: so wird man im Allgemeinen dazu gelangen, dass man die letzte Ableitung, und folglich alle anderen, durch $x, y, z, \ldots$ ausdrückt. Wenn aber eine dieser Substitutionen in allen den Gleichungen, worin man sie macht, noch n Ableitungen ausser der substituirten verschwinden machte, so würde man ein System von Gleichungen erhalten, deren Anzahl die der Ableitungen um n überträfe, und die Elimination von diesen würde, vorausgesetzt dass nicht dasselbe neuerdings sich ereignet, zu n

Gleichungen zwischen den Variablen $x, y, z, \ldots$ selbst, ohne willkürliche Constanten führen. Man könnte daraus die Werthe der n Variablen, deren Ableitungen verschwunden sind, ziehen, und es würden $m-n$ Differentialgleichungen, in Bezug auf die Ableitungen aufgelöst, übrig bleiben. Die Integrale des vorgelegten Systems würden jetzt nur $m-n$ willkürliche Constanten enthalten.

Hat man z. B. die drei Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dx} = x,$$

$$x\frac{dy}{dx} - x\frac{dz}{dx} + y\frac{du}{dx} = z,$$

$$z\frac{dy}{dx} - z\frac{dz}{dx} - x\frac{du}{dx} = y,$$

so führt die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ zu

$$(y-x)\frac{du}{dx} = z - x^2,$$

$$(z+x)\frac{du}{dx} = xz - y;$$

$\frac{dz}{dx}$ ist zugleich mit $\frac{dy}{dx}$ verschwunden, und wenn man $\frac{du}{dx}$ zwischen diesen zwei Gleichungen eliminirt, so resultirt zwischen x, y, z die folgende:

$$\frac{z-x^2}{y-x} = \frac{xz-y}{x+z},$$

oder

$$y^2 + z^2 - xyz + xz - xy - x^3 = 0.$$

Man kann aus ihr z in x und y ziehen, uud man wird dann $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ als Functionen von x und y kennen. Man kommt so auf den anfänglich behandelten Fall zurück, und man wird die Werthe von y und u und folglich von z als Functionen von x und zwei willkürlichen Constanten erhalten.

Simultane lineare Gleichungen.

---

77. Wenn diese Gleichungen alle von der ersten Ordnung sind, so hat man einen besonderen Fall der letzten Aufgabe; nämlich denjenigen, wo die Functionen $F, f, \ldots, \varphi$ linear sind in Bezug auf $y, z, \ldots, u$, während sie x in irgend einer Weise enthalten; und es ist leicht zu sehen, dass dann die Endgleichung in y linear ist.

Was die Bestimmung der anderen Unbekannten betrifft, so ist es wichtig zu bemerken, dass da die Elimination zwischen Gleichungen des ersten Grades in $z, \ldots, u$ stattfindet, man die Werthe dieser Unbekannten, wenn man y kennt, aus denjenigen Gleichungen (1) ziehen kann, aus welchen man will; denn diesen Gleichungen muss genügt werden, und sie geben überdies nur einen Werth für jede Unbekannte.

Wenn diese Gleichungen nicht von der ersten Ordnung sind, so kann man sie nach Nr. 72 und 73 behandeln. Man kann auch sie auf Gleichungen der ersten Ordnung zurückführen, indem man, wie schon oben geschehen, setzt

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots, \quad \frac{dy^{(m-1)}}{dx} = y^{(m-1)},$$

und ebenso für die Variablen $z, \ldots, u$.

Man erhält auf diese Weise eine grössere Zahl von Gleichungen; aber sie ist immer um eine Einheit kleiner als die

Totalanzahl der Variablen, und die Gleichungen sind linear und von der ersten Ordnung in Bezug auf alle Variablen.

Hat man z. B. die zwei Gleichungen

$$A\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{d^2z}{dx^2}+C\frac{dy}{dx}+D\frac{dz}{dx}+Ey+Fz+H=0,$$

$$A'\frac{d^2y}{dx^2}+B'\frac{d^2z}{dx^2}+C'\frac{dy}{dx}+D'\frac{dz}{dx}+E'y+F'z+H'=0,$$

so ersetzt man dieselben durch das folgende System:

$$\frac{dy}{dx}=y',\quad \frac{dz}{dx}=z';$$

$$A\frac{dy'}{dx}+B\frac{dz'}{dx}+Cy'+Dz'+Ey+Fz+H=0,$$

$$A'\frac{dy'}{dx}+B'\frac{dz'}{dx}+C'y'+D'z'+E'y+F'z+H'=0.$$

Die beiden letzten geben $\frac{dy'}{dx}$, $\frac{dz'}{dx}$ als lineare Functionen von y', z', y, z; und indem man so verfährt, wie wir angegeben haben, wird man vier Gleichungen von folgender Form erhalten:

$$\frac{dy}{dx}=y',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=My'+Nz'+Py+Qz+R,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=M'y'+N'z'+P'y+Q'z+R',$$

$$\frac{d^4y}{dx^3}=M''y'+N''z'+P''y+Q''z+R''.$$

Man eliminirt z, z', y' zwischen diesen vier Gleichungen, und erhält eine lineare Gleichung der vierten Ordnung in y. Wenn sie integrirt ist, so substituirt man den Werth von y in drei der vorstehenden, und zieht daraus den Werth von z, welcher die vier Constanten enthalten wird, welche schon in y eingingen. Befolgt man den anderen Weg, so differentiirt man jede der gegebenen Gleichungen zweimal und hat dann sechs Gleichungen, zwischen welchen man z, $\frac{dz}{dx}$, . . . , $\frac{d^4z}{dx^4}$ elimi-

nirt. Nachher substituirt man y seinen Werth als Function von x und vier willkürlichen Constanten in den fünf Gleichungen, und man zieht daraus den Werth von z als Function von x und denselben willkürlichen Constanten.

Simultane lineare Gleichungen von der ersten Ordnung.

78. Diese Gleichungen lassen sich in Bezug auf die Ableitungen der m Variablen $y, z, \ldots, u$ auflösen; und zunächst setzen wir voraus, dass die Coëfficienten dieser Variablen gegebene Constanten seien, während die Terme, welche von ihnen unabhängig sind, beliebige Functionen von x sein können. Wir haben also Gleichungen von folgender Form:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + \cdots + P_1 u = X_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + \cdots + P_2 u = X_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{du}{dx} + A_m y + B_m z + \cdots + P_m u = X_m. \end{cases}$$

Man könnte sie nach den vorhergehenden Methoden behandeln, und würde zu einer linearen Gleichung der $m$ten Ordnung mit constanten Coëfficienten gelangen. Aber einfacher ist die Anwendung des folgenden Verfahrens.

Indem man diese Gleichungen, von der zweiten an, mit Unbestimmten $\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_{m-1}$ multiplicirt und dann addirt, erhält man

$$(2) \quad \begin{cases} d\,\dfrac{(y + \theta_1 z + \cdots + \theta_{m-1} u)}{dx} + (A_1 + A_2\theta_1 + \cdots + A_m\theta_{m-1})y \\ \qquad + (B_1 + B_2\theta_1 + \cdots + B_m\theta_{m-1})z + \cdots \\ \qquad + (P_1 + P_2\theta_1 + \cdots + P_m\theta_{m-1})u \\ \qquad = X_1 + X_2\theta_1 + \cdots + X_m\theta_{m-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichung würde nur die einzige Variable $y + \theta_1 z + \cdots + \theta_{m-1} u$ enthalten, wenn die Verhältnisse der Coëfficienten von $z, \ldots, u$ zu dem Coëfficienten von y respective $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}$ wären; und diese Bedingungen bestimmen, wie wir so-

gleich sehen werden, die Werthe von $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$. Bezeichnet man durch $-a$ den unbestimmten Coëfficienten von y, so ist man zu den m Gleichungen geführt

$$(3) \quad \begin{cases} A_1 + A_2\theta_1 + \cdots + A_m\theta_{m-1} = -a, \\ B_1 + B_2\theta_1 + \cdots + B_m\theta_{m-1} = -a\theta_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_1 + P_2\theta_1 + \cdots + P_m\theta_{m-1} = -a\theta_{m-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen die m Unbekannten a, $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, und wenn man durch X die bekannte Function

$$X_1 + X_2\theta_1 + \cdots + X_m\theta_{m-1}$$

bezeichnet, so wird die Gleichung (2), indem man $y + \theta_1 z + \cdots + \theta_{m-1}u = v$ macht,

$$(4) \qquad \frac{dv}{dx} - av = X,$$

eine lineare Gleichung, welche man integriren kann. Aber beschäftigen wir uns zunächst mit der Auflösung der Gleichungen (3).

Indem man die erste zur Seite lässt, hat man $m-1$ Gleichungen ersten Grades, welche $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}$ als Functionen von a bestimmen; setzt man sie in die erste, so hat man nur noch die Unbekannte a, und man sieht leicht, dass die Gleichung vom Grade m sein wird. In der That, wenn man die Coëfficienten derselben Unbekannten in den $m-1$ Gleichungen, woraus man $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ zieht, durchgeht, so bemerkt man, dass a im ersten Grade vorkommt in dem Coëfficienten von θ_1 in der ersten, von θ_2 in der zweiten, etc., endlich von θ_{m-1} in der letzten, und dass es in keinem anderen vorkommt. Also wird der gemeinschaftliche Nenner der Werthe dieser Unbekannten a im Grade $m-1$, und der Zähler nur im Grade $m-2$ enthalten. Wenn man nun die Substitution in der ersten macht und den Nenner wegmultiplicirt, so erhält man offenbar eine Gleichung vom Grade m in a.

Die Gleichung (4) giebt

$$v = e^{ax}\left(C + \int Xe^{-ax}dx\right) = y + \theta_1 z + \cdots + \theta_{m-1}u.$$

Wenn man in diese Gleichung successive die m Werthe von a setzt, so hat man jedesmal verschiedene Werthe für $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$, und für die Constante C kann man willkürliche ver-

schiedene Werthe nehmen, weil alle diese Gleichungen unabhängig von einander bestehen.

Man erhält auf diese Weise m Gleichungen ersten Grades zwischen x und den m Variablen $y, z, \ldots, u$. Die Werthe dieser Variablen als Functionen von x enthalten m willkürliche Constanten $C_1, C_2, \ldots$, und sind von der Form

$$(5)\begin{cases} y = \alpha_1 e^{a_1 x}(C_1 + \int X e^{-a_1 x} dx) + \alpha_2 e^{a_2 x}(C_2 + \int X e^{-a_2 x} dx) + \cdots, \\ z = \beta_1 e^{a_1 x}(C_1 + \int X e^{-a_1 x} dx) + \beta_2 e^{a_2 x}(C_2 + \int X e^{-a_2 x} dx) + \cdots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Werthe der Constanten lassen sich sehr leicht bestimmen, wenn man für einen gewissen Werth x_0 von x die Werthe $y_0, z_0, \ldots, u_0$ der Functionen $y, z, \ldots, u$ kennt. In der That, der Einfachheit wegen wird man alle Integrale von x_0 an nehmen; und wenn man $x = x_0$ macht in dem oben gefundenen Werthe für v, so hat man

$$C e^{a x_0} = y_0 + \theta_1 z_0 + \cdots + \theta_{m-1} u_0,$$

was die Constante C bestimmt, welche zu irgend einem der Systeme $a, \theta_1, \ldots$ gehört. Man kennt also auf diese Weise die m Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Wenn die zweiten Glieder der Gleichungen (1) Null wären, so würde man nur haben

$$y = C\alpha_1 e^{a_1 x} + C_1 \alpha_2 e^{a_2 x} + \cdots$$
$$z = C\beta_1 e^{a_1 x} + \cdots \text{ etc.}$$

Wenn man alle Constanten, bis auf eine, gleich Null nimmt, so hat man Auflösungen von der Form

$$y = C\alpha_1 e^{a_1 x}, \quad z = C\beta_1 e^{a_1 x}.$$

Die Verhältnisse der Variablen sind dann constant, was auch C sei; und die allgemeinen Werthe sind aus den Summen dieser particulären Auflösungen, welche den verschiedenen Exponenten $a_1, \ldots, a_m$ entsprechen, gebildet.

79. Als Beispiel nehme man die zwei Gleichungen

$$(\alpha) \quad \frac{dy}{dx} + Ay + Bz = 0, \quad \frac{dz}{dx} + A_1 y + B_1 z = 0.$$

Indem man die zweite mit θ multiplicirt und zur ersten addirt, so kommt

$$\frac{d(y + \theta z)}{dx} + (A + \theta A_1) y + (B + \theta B_1) z = 0.$$

Setzen wir

(β) $y+\theta z = v, \quad A+\theta A_1 = -a, \quad B+\theta B_1 = -a\theta,$
so wird die vorige Gleichung

$$(\gamma) \qquad \frac{dv}{dx} - av = 0,$$

und θ ist durch die Gleichung bestimmt

$$\frac{B+\theta B_1}{\theta} = A + \theta A_1$$

oder

$$(\delta) \qquad A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B = 0.$$

Es seien θ_1, θ_2 die beiden Wurzeln dieser Gleichung; v_1, v_2 die entsprechenden Werthe von v; a_1, a_2 diejenigen von a man hat

$$y + \theta_1 z = v_1, \quad y + \theta_2 z = v_2,$$

woraus man zieht

$$(\varepsilon) \qquad z = \frac{v_2 - v_1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad y = \frac{v_1\theta_2 - v_2\theta_1}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Nun giebt die Gleichung (γ) $v = Ce^{ax}$; und wenn man durch C_1, C_2 die Werthe der Constante C bezeichnet, welche mit θ_1, θ_2 correspondiren, so werden die Gleichungen (ε)

$$(\zeta) \qquad z = \frac{C_2e^{a_2x} - C_1e^{a_1x}}{\theta_2 - \theta_1}, \quad y = \frac{C_1\theta_2e^{a_1x} - C_2\theta_1e^{a_2x}}{\theta_2 - \theta_1}.$$

Wären die Wurzeln der Gleichung (δ) imaginär, so würden die Werthe von y und z sich unter einer imaginären Form darbieten, und man würde ihnen die reelle Form durch die gewöhnlichen Transformationen geben. Aber wenn diese Wurzeln gleich wären, so würden die Nenner von y und z Null sein; die Formeln (ζ) wären jetzt absurd, wenn man nicht annehmen wollte, was man thun kann, dass die Constanten C_2, C_1 gleich würden zu gleicher Zeit mit θ_2, θ_1, und diese Formeln würden dann die Werthe von y und z unter der Form $\frac{0}{0}$ geben.

Um aus den Gleichungen (ζ) die auf diesen besonderen Fall bezüglichen Werthe abzuleiten, kann man annehmen, dass die Coëfficienten der Gleichungen (α) oder nur ein unter ihnen nach Belieben gewählter so modificirt seien, dass die Werthe von θ nicht mehr gleich sind, und kann nachher diese Coëf-

ficienten gegen die gegebenen Werthe convergiren lassen. Es wird genügen, dass man die Grenzen der Werthe von y und z mit zwei willkürlichen Constanten finde, um die gesuchte Auflösung zu haben. Man könnte hierzu denselben Weg einschlagen, der früher in einem ähnlichen Falle befolgt wurde; aber es ist möglich die Rechnung durch folgende Betrachtungen abzukürzen, welche auch in anderen Umständen anwendbar sind.

Man bemerkt zunächst, dass die beiden Glieder der Brüche, welche y und z darstellen, betrachtet werden können als Functionen der Variable θ_2, welche gegen die Grenze θ_1 convergirt: denn a hängt von θ ab durch die zweite der Gleichungen (β), und die gegen C_1 convergirende Constante C_2 kann betrachtet werden als eine willkürliche Function von θ_2, welche zur Grenze C_1 hat. Man kann daher die Formeln (ζ) nach den gewöhnlichen Regeln für Brüche behandeln, welche sich für einen besonderen Werth eines Buchstaben, den sie enthalten, auf $\frac{0}{0}$ reduciren.

Indem man also in Bezug auf θ_2 die beiden Glieder der Brüche, welche z und y darstellen, differentiirt, erhält man für den ersten

$$\frac{dC_2}{d\theta_2}\, e^{a_2 x} + C_2 x e^{a_2 x}\, \frac{da_2}{d\theta_2},$$

und für den zweiten

$$C_1 e^{a_1 x} - \theta_1 \frac{dC_2}{d\theta_2}\, e^{a_2 x} - C_2\, \theta_1\, x e^{a_2 x} \frac{da_2}{d\theta_2},$$

und man erhält die Grenzen von y und z, indem man in diesen Ausdrücken $\theta_2 = \theta_1$, $a_2 = a_1$, $C_2 = C_1$ macht und berücksichtigt, dass $\frac{dC_2}{d\theta_2}$ eine vollkommen willkürliche Constante C sein wird, weil C_2 eine willkürliche Function von θ_2 ist. Was $\frac{da_2}{d\theta_2}$ betrifft, so bestimmt man seinen Werth vermöge der zweiten Gleichung (β), in welcher A und A_1 constant sind, und welche giebt

$$\frac{da}{d\theta} = -A_1.$$

Man findet auf diese Weise für den Fall der gleichen Wurzeln

$$z = (C - C_1 A_1 x) e^{a_1 x}, \quad y = (C_1 - \theta_1 C + \theta_1 C_1 A_1 x) e^{a_1 x}.$$

80. Wenn in den Gleichungen (1) die Coëfficienten A_1, $A_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots$ Functionen von x wären, so müsste die angewandte Methode nothwendig modificirt werden, weil $\frac{dy}{dx} + \theta_1 \frac{dz}{dx} + \cdots + \theta_{m-1} \frac{du}{dx}$ nicht mehr die Ableitung von $y + \theta_1 z + \cdots + \theta_{m-1} u$ sein würde, da die Factoren $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ nicht mehr constant sein könnten. Dennoch würde man in derselben Weise anfangen und setzen

$$y + \theta_1 z + \cdots + \theta_{m-1} u = v,$$

woraus man ziehen würde

$$\frac{dy}{dx} + \theta_1 \frac{dz}{dx} + \cdots + \theta_{m-1} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} - z \frac{d\theta_1}{dx} - \cdots - u \frac{d\theta_{m-1}}{dx}.$$

Die vorige Gleichung würde dazu dienen, um y aus der durch Addiren der m Gleichungen erhaltenen Gleichung zu eliminiren; nachher würde man die Coëfficienten der $m-1$ Variablen $z, \ldots, u$ in dieser Gleichung gleich Null setzen; hieraus würden zunächst $m-1$ nicht lineare Gleichungen der ersten Ordnung zwischen den $m-1$ Variablen $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ resultiren, und ausserdem eine lineare Gleichung der ersten Ordnung in v, welche man nach der Bestimmung von $\theta_1, \ldots, \theta_m$ behandeln würde. Um ein Beispiel von diesem Verfahren zu geben, seien die beiden Gleichungen

$$(a) \qquad \frac{dy}{dx} + Ay + Bz = X, \qquad \frac{dz}{dx} + A_1 y + B_1 z = X_1;$$

die zweite mit θ multiplicirend und zu der ersten addirend, erhält man

$$(b) \qquad \frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} + (A + \theta A_1) y + (B + \theta B_1) z = X + \theta X_1.$$

Setzen wir

$$y + \theta z = v, \quad \text{woraus} \quad y = v - \theta z$$

und

$$\frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dx} - z \frac{d\theta}{dx};$$

die Gleichung (b) wird dann

$$\frac{dv}{dx} - z \left[\frac{d\theta}{dx} + A_1 \theta^2 + (A - B_1)\theta - B\right] + (A + \theta A_1) v = X + \theta X_1.$$

Setzt man den Coëfficienten von z gleich Null, so hat man statt dieser Gleichung die zwei folgenden:

$$(c)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dx} + A_1\theta^2 + (A - B_1)\,\theta - B = 0, \\ \dfrac{dv}{dx} + (A + \theta A_1)\,v = X + \theta X_1. \end{cases}$$

Man wird damit anfangen, dass man die erste zu integriren sucht, welche nur θ und x enthält; und kann man dahin gelangen, so wird die zweite v ohne Schwierigkeit geben. Nachher wird man y und z bestimmen, indem man zwei Werthe von θ nimmt, welche zwei Werthen der darin enthaltenen Constante entsprechen.

Wenn die Coëfficienten constant sind, so kann man der ersten der Gleichnngen (c) genügen, indem man setzt

$$A_1\theta^2 + (A - B_1)\theta - B = 0,$$

was für θ zwei Werthe geben würde; man würde folglich zwei für v finden und daraus y und z ableiten. Man könnte auch die Gleichung in θ allgemein integriren und zwei Werthe dieser Function von x nehmen, welche zwei Werthen der Constante entsprechen, wie in dem Falle wo die Coëfficienten Functionen von x waren.

Dieses letztere Verfahren wird mit Vortheil auf den Fall angewandt, wo die beiden Wurzeln der Gleichung

$$A_1\theta^2 + (A - B_1)\,\theta - B = 0$$

gleich sind, also die durch das erste gegebenen Formeln illusorisch werden. In diesem Falle hat man, wenn α diesen Werth von θ bezeichnet,

$$\frac{d\theta}{dx} + A_1\,(\theta - \alpha)^2 = 0,$$

daher

$$\theta = \alpha + \frac{1}{A_1 x + c},$$

wo c eine willkürliche Constante. Indem man c die beiden Werthe 0 und ∞ giebt, welche hier die bequemsten sind, findet man für θ die zwei Werthe α und $\alpha + \dfrac{1}{A_1 x}$, welche substituirt in der zweiten Gleichung (c), zwei Werthe von v geben werden, aus denen man y und z zieht.

81. **Andere Methode für den Fall der constanten Coëfficienten.** — Wenn die zweiten Glieder $X_1, \ldots, X_m$ der Gleichungen (1) fehlen, so bemerkt man zunächst, dass die Summe mehrerer Systeme von Werthen für $y, \ldots, u$, welche einzeln diesen Gleichungen genügen, ihnen auch genügt, und dass man folglich nur m Systeme zu finden braucht, von denen jedes eine willkürliche Constante enthält.

Hierzu kann man willkürliche bestimmte Verhältnisse zwischen den Variablen annehmen, indem man setzt

$$z = \alpha y, \ldots, u = \mu y;$$

woraus die folgenden Gleichungen resultiren:

$$\frac{dy}{dx} + y(A_1 + B_1\alpha + \cdots + P_1\mu) = 0,$$

$$\alpha\frac{dy}{dx} + y(A_2 + B_2\alpha + \cdots + P_2\mu) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu\frac{dy}{dx} + y(A_m + B_m\alpha + \cdots + P_m\mu) = 0.$$

Damit diese Gleichungen übereinstimmen, hat man die $m-1$ Bedingungen

$$A_2 + B_2\alpha + \cdots + P_2\mu = \alpha(A_1 + B_1\alpha + \cdots + P_1\mu),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m + B_m\alpha + \cdots + P_m\mu = \mu(A_1 + B_1\alpha + \cdots + P_1\mu),$$

oder indem man eine neue Unbekannte $-a$ einführt, welche den allen zweiten Gliedern gemeinschaftlichen Factor repräsentirt,

$$(6)\quad \begin{cases} A_1 + B_1\alpha + \cdots + P_1\mu = -a, \\ A_2 + B_2\alpha + \cdots + P_2\mu = -a\alpha, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m + B_m\alpha + \cdots + P_m\mu = -a\mu. \end{cases}$$

Wenn man aus den $m-1$ letzten die Werthe von $\alpha, \beta, \cdots \mu$ zieht, so erkennt man wie oben, dass die Gleichung in a vom Grade m ist, und es würde leicht sein, die Identität dieser zwei Gleichungen in a aus der Form der Gleichungen (3) und (6) zu erweisen.

Für jeden Werth von a hat man ein System Werthe von $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, und es handelt sich nur noch darum, y zu kennen, welches durch die Gleichung gegeben wird

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0,$$



woraus $y = Ce^{ax}$, während C willkürlich; man hat also eine Auflösung der vorgelegten Gleichungen, indem man nimmt

$$y = Ce^{ax},\quad z = C\alpha e^{ax}, \ldots,\quad u = C\mu e^{ax}.$$

Man erhält m ähnliche Systeme, indem man für a seine m Werthe nimmt; jedes von ihnen enthält eine willkürliche Constante, und addirend hat man die allgemeine Auflösung der Aufgabe durch die Formeln ausgedrückt:

$$(7)\quad \begin{cases} y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + \cdots + C_m e^{a_m x}, \\ z = C_1 \alpha_1 e^{a_1 x} + C_2 \alpha_2 e^{a_2 x} + \cdots + C_m \alpha_m e^{a_m x}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u = C_1 \mu_1 e^{a_1 x} + C_2 \mu_2 e^{a_2 x} + \cdots + C_m \mu_m e^{a_m x}. \end{cases}$$

Wenn mehrere der Wurzeln $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gleich wären, so würde man verfahren, wie wir dies schon bei demselben Umstande gethan haben, und die Werthe von $y, z, \ldots, u$ würden immer m willkürliche Constanten enthalten.

82. Es ist leicht von diesem Falle auf jenen der Gleichungen (1) überzugehen: hierzu braucht man nur den Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_m$ Functionen von x zu substituiren, wie man dies schon in Nr. 41 gethan hat.

Indem man die Gleichungen (7) differentiirt und die Werthe von $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{du}{dx}$ in den Gleichungen (1) substituirt, bleiben nur die mit den Differentialen von $C_1, \ldots, C_m$ behafteten Terme und die zweiten Glieder $X_1, \ldots, X_m$ stehen.

Man erhält auf diese Weise

$$e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} + e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + e^{a_m x}\frac{dC_m}{dx} = X_1,$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\mu_1 e^{a_1 x}\frac{dC_1}{dx} + \mu_2 e^{a_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \cdots + \mu_m e^{a_m x}\frac{dC_m}{dx} = X_m.$$

Hieraus zieht man die Werthe von $\frac{dC_1}{dx}, \ldots, \frac{dC_m}{dx}$ als Functionen von x; und, indem man sie integrirt, kennt man $C_1, \ldots, C_m$. Substituirt man diese in den Gleichungen (7), so hat man die allgemeine Auflösung der Gleichungen (1) mit den m Constanten, welche von den auf $C_1, \ldots, C_m$ bezüglichen Quadraturen herrühren.



83. Man kann auf simultane Gleichungen eine Bemerkung anwenden, welche früher in dem Falle einer einzigen Differentialgleichung gemacht wurde.

Es seien z. B. die Gleichungen der ersten Ordnung

(1) $F(x, y, z, y', z') = 0, \quad f(x, y, z, y', z') = 0,$

worin $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$.

Nehmen wir an, dass man die allgemeinen Integrale dieser zwei Gleichungen kenne, und stellen wir sie dar durch

(2) $$y = \varphi(x, a, b), \quad z = \psi(x, a, b),$$

während a und b zwei willkürliche Constanten.

Die Gleichungen (1) würden identisch werden in x, a, b, wenn man darin die Ausdrücke (2) substituirte. Wenn wir sie in Bezug auf a unter dieser Voraussetzung differentiiren, so erhalten wir Resultate, welche identisch Null sind; woraus die Gleichungen hervorgehen

$$\frac{dF}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{da} + \frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{da} + \frac{dF}{dz'}\frac{dz'}{da} = 0,$$
$$\frac{df}{dy}\frac{dy}{da} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{da} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{da} + \frac{df}{dz'}\frac{dz'}{da} = 0,$$

oder, indem man $\frac{dy}{da} = u$, $\frac{dz}{da} = v$ setzt,

(3) $$\begin{cases} \frac{dF}{dy}u + \frac{dF}{dz}v + \frac{dF}{dy'}\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dz'}\frac{dv}{dx} = 0, \\ \frac{df}{dy}u + \frac{df}{dz}v + \frac{df}{dy'}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dz'}\frac{dv}{dx} = 0. \end{cases}$$

Denken wir uns jetzt, dass man in den Coëfficienten $\frac{dF}{dy}\cdots\frac{df}{dy}\cdots$ für y, z, y', z' ihre Werthe in x, a, b gesetzt habe, so hat man zwei lineare Gleichungen in u, v mit Coëfficienten, die Functionen von x sind, und es wird ihnen genügt, wenn man darin für u und v die Functionen $\frac{d\varphi}{da}$, $\frac{d\psi}{da}$ setzt.

In gleicher Weise würde man sehen, dass die Gleichungen (3) die Auflösung $\frac{d\varphi}{db}$, $\frac{d\psi}{db}$ zulassen.

Wenn man daher durch A und B zwei willkürliche Constanten bezeichnet, so sind die allgemeinen Integrale der Gleichungen (3)

$$u = A\frac{d\varphi}{da} + B\frac{d\varphi}{db},$$

$$v = A\frac{d\psi}{da} + B\frac{d\psi}{db}.$$

Hätte man nur Werthe von y und z mit einer einzigen Constante a gegeben, so hätte man nur ein particuläres Integral des Systems (3) erhalten können.

Man sieht auf diese Weise, dass, wenn man die allgemeinen Integrale simultaner Gleichungen von beliebiger Form und Ordnung kennt, man ein System von simultanen linearen Gleichungen bilden kann, welche respective von derselben Ordnung, mit variablen Coëfficienten sind, und deren allgemeine Integrale sich aus den ersten durch einfache Differentiationen ableiten lassen.



Integration durch Reihen.

84. Wir sahen schon, wie man vermöge der Theoreme von Taylor und Maclaurin das Integral einer Differentialgleichung von beliebiger Ordnung in eine Reihe entwickeln kann. Man gelangt auch dazu vermöge der unbestimmten Coëfficienten. Wir wollen einige Beispiele der einen und der anderen Methode geben.

Betrachten wir zunächst die Gleichung

$$(1) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + nxy = 0;$$

man findet differentiirend

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + nx\frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

$$x\frac{d^4y}{dx^3} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + nx\frac{d^2y}{dx^2} + 2n\frac{dy}{dx} = 0,$$

. . . .

$$x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (m+1)\frac{d^my}{dx^m} + nx\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)n\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = 0.$$

Indem man in allen diesen Gleichungen $x = 0$ macht, hat man

$$\frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{n}{3}y,\ \frac{d^3y}{dx^3} = 0,\ \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{n^2}{5}y, \ldots,$$

und allgemein für m ungerade

$$\frac{d^my}{dx^m} = 0;$$

und für m gerade

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{n^{\frac{m}{2}} y}{m+1} \text{ oder } - \frac{n^{\frac{m}{2}} y}{m+1},$$

je nachdem m durch 4 theilbar ist oder nicht.

Man zieht hieraus

$$y = y_0 \left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2 x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{n^3 x^6}{1\ldots 7} + \ldots\right)$$

$$= y_0 \frac{\sin . x\sqrt{n}}{x\sqrt{n}}.$$

Indem man also durch C die willkürliche Constante $\frac{y_0}{\sqrt{n}}$ darstellt, hat man

$$y = \frac{C \sin . x\sqrt{n}}{x}.$$

Dieser Ausdruck, da er nur eine Constante enthält, ist nicht das allgemeine Integral; er giebt nur dasjenige, welches sich nach der Formel von Maclaurin entwickeln lässt.

Da man ein particuläres Integral kennt, so erhält man das allgemeine Integral, indem man C als Function von x betrachtet; und man wird nach der früher auseinandergesetzten Methode zu einer linearen Gleichung der ersten Ordnung geführt.

Man findet zunächst, indem man den Werth von y in der vorgelegten Gleichung substituirt,

$$\frac{d^2 C}{dx^2} + 2\sqrt{n}\,\frac{dC}{dx}\, cotg . x\sqrt{n} = 0;$$

$\frac{dC}{dx} = p$ setzend gelangt man zu

$$p = \frac{C_1}{(\sin . x\sqrt{n})^2},$$

während C_1 eine willkürliche Constante; daraus leitet man her

$$C = C' + C''\, cotg . x\sqrt{n},$$

worin C' und C'' willkürliche Constanten. Das allgemeine Integral der vorgelegten ist also

$$(2) \qquad y = \frac{C' \sin . x\sqrt{n} + C'' \cos . x\sqrt{n}}{x}.$$

85. Durch Anwendung der Formel von Taylor statt jener von Maclaurin würde man das allgemeine Integral erhalten. Die Gleichung (1) würde den Werth von $\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_0$ als Function von y_0 und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, welche sich auf den willkürlichen Werth x_0 beziehen, ergeben; und ihre successiven Ableitungen ergeben $\left(\frac{d^3 y}{d x^3}\right)_0$ etc., wodurch die Entwicklung von y nach den Potenzen von $x - x_0$ mit zwei willkürlichen Constanten bestimmt wird. Man kann leicht verificiren, dass dieser Werth von y zusammenfällt mit demjenigen, welchen die Gleichung (2) giebt, indem man letztern nach den Potenzen von $x - x_0$ entwickelt, nachdem er zuvor auf die Form gebracht ist

$$y = \frac{C_1 \sin.(x - x_0)\sqrt{n} + C_2 \cos.(x - x_0)\sqrt{n}}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}}.$$

86. Integriren wir jetzt dieselbe Gleichung durch die Methode der unbestimmten Coëfficienten. Es sei

$$y = a_1 x^\alpha + a_2 x^\beta + a_3 x^\gamma + a_4 x^\delta + \ldots$$

Aus dieser nach steigenden Potenzen von x geordneten Reihe leitet man ab

$$n y = n a_1 x^\alpha + n a_2 x^\beta + n a_3 x^\gamma + \ldots,$$

$$\frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 2 a_1 \alpha x^{\alpha-2} + 2 a_2 \beta x^{\beta-2} + 2 a_3 \gamma x^{\gamma-2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = a_1 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + a_2 \beta(\beta-1) x^{\beta-2} + a_3 \gamma(\gamma-1) x^{\gamma-2} + \ldots.$$

Die Summe der zweiten Glieder dieser Gleichungen muss Null sein, was auch x sei, zufolge der vorgelegten Gleichung; welches verlangt dass die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x einzeln Null seien.

Der kleinste Exponent ist $\alpha - 2$; der Coëfficient des Gesammtgliedes von diesem Grade giebt die Bedingung $\alpha(\alpha+1) = 0$, welcher man genügt durch $\alpha = -1$ oder $\alpha = 0$.

1. Es sei $\alpha = -1$. Da das Glied $n a_1 x^\alpha$ nicht von selbst verschwinden kann, so muss es sich mit anderen aufheben; dazu ist aber nothwendig, dass α nicht unter $\beta - 2$ liege. Wenn $\beta - 2 < \alpha$, so muss $\beta(\beta+1) = 0$, damit die Glieder vom

Grade $\beta - 2$ sich zerstören, was nur $\beta = 0$ giebt, weil $\beta > \alpha$. Hierauf muss man haben

$$\gamma - 2 = \alpha, \quad \delta - 2 = \beta, \ldots;$$

die Coëfficienten geben die Bedingungen

$$a_3 \gamma(\gamma + 1) + n a_1 = 0, \quad a_4 \delta(\delta + 1) + n a_2 = 0, \ldots.$$

Man zieht aus diesen verschiedenen Gleichungen

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \ldots,$$

$$a_3 = -\frac{a_1 n}{1.2}, \quad a_5 = \frac{a_1 n^2}{1.2.3.4}, \ldots,$$

$$a_4 = -\frac{a_2 n}{1.2.3}, \quad a_6 = \frac{a_2 n^2}{1.2.3.4.5}, \ldots$$

. . . .

Es giebt also zwei unbestimmte Constanten a_1, a_2, und der Werth von y ist

$$y = a_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{n x}{1.2} + \frac{n^2 x^3}{1.2.3.4} - \frac{n^3 x^5}{1.2.3.4.5.6} + \cdots \right)$$
$$+ a_2 \left(1 - \frac{n x^2}{1.2.3} + \frac{n^2 x^4}{1.2.3.4.5} - \cdots \right),$$

oder

$$y = \frac{a_1 \cos . x \sqrt{n}}{x} + \frac{\frac{a_2}{\sqrt{n}} \sin . x \sqrt{n}}{x},$$

welche Auflösung identisch ist mit der schon gefundenen.

Wir haben $\beta - 2 < \alpha$ genommen, aber wir hätten $\beta - 2 = \alpha$ nehmen können. In diesem Falle würden wir allein $y = \frac{a_1 \cos . x \sqrt{n}}{x}$ gefunden haben, was nur ein particuläres Integral ist. Die Auflösung würde nur vollständig werden, wenn man auch die Annahme $\alpha = 0$ macht, welche wir jetzt untersuchen wollen.

2. Es sei $\alpha = 0$. In diesem Falle kann man nicht haben $\beta - 2 < \alpha$, weil der Coëfficient von $x^{\beta - 2}$ Null sein müsste, was $\beta(\beta + 1) = 0$ geben würde, eine unmögliche Gleichung weil $\beta > \alpha$. Man hat also $\beta - 2 = \alpha$, und folglich $\gamma - 2 = \beta, \ldots$.

Die Exponenten haben daher die folgenden Werthe

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \ldots;$$

die Coëfficienten werden

$$a_2 = -\frac{a_1 n}{1.2.3}, \quad a_3 = \frac{a_1 n^2}{1.2.3.4.5}, \ldots,$$

und folglich

$$y = \frac{\frac{a_1}{\sqrt{n}} \, sin.x\sqrt{n}}{x}.$$

Man findet also wieder nur ein particuläres Integral, weil nur eine willkürliche Constante darin vorkommt. Vereinigt mit dem vorhin gefundenen würde es das allgemeine Integral geben.

87. Es sei noch die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0;$$

indem man setzt

$$y = A_1 x^\alpha + A_2 x^\beta + A_3 x^\gamma + \ldots,$$

hat man

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = A_1 \alpha x^{\alpha-2} + A_2 \beta x^{\beta-2} + A_3 \gamma x^{\gamma-2} + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + A_2\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + A_3\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots.$$

Die Summe der zweiten Glieder dieser drei Gleichungen soll identisch Null sein. Die Glieder mit $x^{\alpha-2}$ müssen sich aufheben, dies giebt $\alpha(\alpha-1) + \alpha = 0$ oder $\alpha = 0$.

Die Glieder mit $x^{\beta-2}$ können hier nicht von niedrigerem Grade als α sein; denn ihre Coëfficienten würden $\beta = 0$ geben, was nicht sein kann. Also

$$\beta - 2 = \alpha, \quad \gamma - 2 = \beta, \ldots.$$

Daher

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \ldots.$$

Die Coëfficienten geben die Bedingungen

$$A_2\beta^2 + A_1 = 0, \quad A_3\gamma^2 + A_2 = 0, \ldots,$$

woraus

$$A_2 = -\frac{A_1}{2^2}, \quad A_3 = \frac{A_1}{2^2.4^2}, \quad A_4 = -\frac{A_1}{2^2.4^2.6^2}, \ldots,$$

und folglich

$$y = A_1\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right).$$

Dieses Verfahren liefert nur ein particuläres Integral, da nur eine willkürliche Constante eingeht.

88. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{y}{x} = 0$$

wird man finden

$$y = A_1 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2 . 3} - \frac{x^4}{2^2 . 3^2 . 4} + \frac{x^5}{2^2 . 3^2 . 4^2 . 5} \cdots \right),$$

welches wieder ein particuläres Integral ist; woraus man schliesst, dass das allgemeine Integral nicht entwickelbar ist nach den positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Potenzen von x.

Integration der Differentialgleichungen mittelst bestimmter Integrale.

89. Wir haben Mittel gegeben um, in gewissen Fällen, die Integration der Differentialgleichungen auf diejenige von Functionen von x oder von y allein zurückzuführen. Wenn dies nicht möglich ist, so sucht man bisweilen das Problem zurückzubringen auf die Integration einer Function, welche x und eine andere Variable enthält, in Bezug auf welche man zwischen bestimmten Grenzen integrirt, indem man x als eine Constante betrachtet. Diese Form eines bestimmten Integrals, welche man y giebt, ist oft nützlich in den Aufgaben der mathematischen Physik, und sie würde es noch viel mehr sein, wenn man Tafeln hätte, welche den Werth dieses Integrals für irgend einen Werth der darin enthaltenen Constante x erkennen liessen.

90. Ein Mittel, das man oft anwendet um auf diese Weise den Werth von y zu erhalten, besteht darin dass man zunächst diesen Werth in eine Reihe entwickelt, und diese Reihe summirt, wenn man eine einfache Relation zu erkennen vermag zwischen ihrem allgemeinen Gliede und dem bestimmten Integrale des allgemeinen Gliedes der Entwicklung einer bekannten Function von x und einer anderen Variable, auf welche Variable sich die bestimmte Integration bezieht. Wir werden dies durch Beispiele erläutern.

Es sei die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{m}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0,$$

welche sich in vielen Aufgaben der Physik und Mechanik darbietet. Indem man sie durch die Methode der unbestimmten Coëfficienten integrirt, erhält man die beiden folgenden Reihen, von denen jede ein particuläres Integral liefert:

$$y=A\left\{\begin{aligned}&x^{-m+1}-\frac{\frac{n}{2}x^{-m+3}}{1.(-m+3)}+\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2x^{-m+5}}{1.2.(-m+3)(-m+5)}-\ldots\\&+\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^p x^{-m+2p+1}}{1.2\ldots p.(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2p+1)}+\ldots\end{aligned}\right\},$$

$$y=A'\left\{\begin{aligned}&1-\frac{\frac{n}{2}x^2}{1.(m+1)}+\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2x^4}{1.2.(m+1)(m+3)}\\&-\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3x^6}{1.2.3.(m+1)(m+3)(m+5)}+\ldots\\&+\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^p x^{2p}}{1.2\ldots p.(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)}+\ldots\end{aligned}\right\}.$$

Wenn man diese beiden Werthe von y addirte, so würde man das allgemeine Integral mit zwei willkürlichen Constanten A und A' haben. Die erste dieser Reihen wird illusorisch wenn m eine ungerade positive Zahl ist, und die zweite wenn m eine ungerade negative Zahl ist. Also besteht in allen Fällen eine von beiden, und wir wissen wie man, wenn ein particuläres Integral bekannt ist, das allgemeine finden kann. Bezeichnet man durch y_1 das bekannte Integral, so wird das allgemeine Integral durch die Formel gegeben

$$(2)\qquad y=Cy_1+C'y_1\int\frac{dx}{x^m y_1^2}.$$

Um eine Reihe von derselben Form wie die zweite der beiden vorigen zu erhalten, betrachten wir zunächst die folgende Entwicklung:

$$cos(\alpha\cos\omega)=1-\frac{\alpha^2\cos\omega^2}{2}+\frac{\alpha^4\cos\omega^4}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{(-\alpha^2)^p\cos\omega^{2p}}{1.2.3\ldots2p}+\ldots;$$

multipliciren wir die beiden Glieder mit $\sin\omega^{m-1}d\omega$ und integriren zwischen 0 und π, indem wir jedoch m positiv voraussetzen, ohne welche Bedingung das Integral unendlich sein würde. Nimmt man dabei Rücksicht auf die folgende Formel, welche durch bekannte Reductionen erhalten wird

$$\int_0^\pi \cos\omega^{2i}\sin\omega^\mu\,d\omega$$

$$=\frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)}{(\mu+2)(\mu+4)\ldots(\mu+2i-2)(\mu+2i)}\int_0^\pi \sin\omega^\mu\,d\omega,$$

und worin man, aus demselben Grunde, $\mu > -1$ voraussetzen muss, so gelangt man zu der Gleichung

$$\int_0^\pi \cos(\alpha\cos\omega)\sin\omega^{m-1}\,d\omega = \int_0^\pi \sin\omega^{m-1}\,d\omega - \ldots$$

$$+\frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^p \int_0^\pi \sin\omega^{m-1}\,d\omega}{1.2.3\ldots p.(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)}+\ldots,$$

oder, indem man $\alpha = x\sqrt{n}$ setzt, und $\int_0^\pi \sin\omega^{m-1}d\omega$ als Factor heraussetzt,

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega^{m-1}\,d\omega$$

$$=\int_0^\pi \sin\omega^{m-1}\,d\omega\left\{\begin{matrix}1-\dfrac{\frac{nx^2}{2}}{1.(m+1)}+\dfrac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1.2.(m+1)(m+3)}-\ldots\\ +\dfrac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1.2\ldots p.(m+1)(m+3)\ldots(m+2p-1)}+\ldots\end{matrix}\right\},$$

was nichts Anderes ist als unsere zweite Reihe, bis auf einen constanten Factor. Das Integral, welches sie ausdrückt, kann folglich unter die Form gebracht werden

$$y = B\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega^{m-1}\,d\omega,$$

wofern man hat $m > 0$.

Was die erste Reihe betrifft, welche sich so schreiben lässt:

$$y = A x^{-m+1} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{\frac{n x^2}{2}}{1.(-m+3)} + \frac{\left(\frac{n x^2}{2}\right)^2}{1.2.(-m+3)(-m+5)} - \ldots \\ + \frac{\left(-\frac{n x^2}{2}\right)^p}{1.2 \ldots p.(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2p+1)} + \ldots \end{array} \right\},$$

so sieht man dass die eingeklammerte Reihe sich von der vorigen nur durch die Veränderung von m in $-m+2$ unterscheidet. Man kann daher diese letzte Gleichung unter die folgende Form bringen, wofern man hat $m < 2$,

$$y = B_1 x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos\omega) \sin\omega^{1-m} \, d\omega,$$

worin B_1 eine willkürliche Constante. Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist folglich

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = B \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos\omega) \sin\omega^{m-1} \, d\omega \\ \quad + B_1 x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos\omega) \sin\omega^{1-m} \, d\omega, \end{array} \right.$$

allemal dann wenn man die beiden Bedingungen hat

$$m > 0, \quad m < 2.$$

Wenn m ausserhalb dieser Grenzen liegt, so wird nur noch ein einziges der beiden Integrale bestehen, und die Gleichung (3), reducirt auf einen der beiden Terme, wird nur ein particuläres Integral geben. In diesem Falle giebt die Gleichung (2) das allgemeine Integral.

Betrachten wir jetzt die beiden besonderen Fälle, wo $m=0$, und $m=2$.

91. Es sei zunächst $m=0$, was die vorgelegte Gleichung auf $\frac{d^2 y}{d x^2} + n y = 0$ reducirt. Man muss sich auf den zweiten Theil der Formel (3) beschränken, und man hat das particuläre Integral

$$y_1 = B_1 x \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos\omega) \sin\omega \, d\omega.$$

Indem man die Integration ausführt und durch C eine willkürliche Constante bezeichnet, kommt

$$y_1 = C\,sin.x\sqrt{n}.$$

Die Formel (2) giebt folglich, indem man durch C_1 eine zweite willkürliche Constante bezeichnet,

$$(4) \qquad y = C\,sin.x\sqrt{n} + C_1\,cos.x\sqrt{n}.$$

Einfacher würde man zu diesem Resultate kommen durch directe Behandlung der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ny = 0.$$

Indem man so verfährt, wie wir dies für die linearen Gleichungen mit constanten Coëfficienten angegeben haben, findet man unmittelbar die Formel (4).

92. Es sei jetzt $m = 2$, und folglich

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + ny = 0;$$

man behält nur den ersten Theil der Formel (3) bei, und indem man die Integration ausführt, findet man

$$y_1 = \frac{C\,sin.x\sqrt{n}}{x}.$$

Hiernach giebt die Gleichung (2) den Werth des allgemeinen Integrals

$$y = \frac{C\,sin.x\sqrt{n} + C_1\,cos.x\sqrt{n}}{x}.$$

Man könnte die Gleichung (5) direct behandeln und $y = \frac{u}{x}$ setzen; man würde erhalten

$$\frac{d^2u}{dx^2} + nu = 0,$$

woraus

$$y = \frac{u}{x} = \frac{C\,sin.x\sqrt{n} + C_1\,cos.x\sqrt{n}}{x}.$$

93. Es existirt ein anderer besonderer Fall, der einen Kunstgriff erfordert analog demjenigen, welchen wir mehrmals in gewissen Fällen von gleichen Wurzeln angewandt haben: der Fall nämlich, wo $m = 1$; die beiden Theile der Formel (3) reduciren sich jetzt auf einen, und man hat nur noch ein particuläres Integral, obgleich der Werth von m zwischen die Grenzen 0 und 2 fällt. Man könnte zwar wieder

auf die Formel (2) recurriren; aber viel einfacher erhält man das allgemeine Integral in folgender Weise:

Ersetzen wir m durch $1 + \delta$ in dem zweiten Theile von y in der Formel (3); er wird

$$B_1 \, x^{-\delta} \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega) \sin\omega^{-\delta} \, d\omega\,;$$

aber

$$x^{-\delta} = 1 - \delta\, l\, x + \frac{\delta^2}{1\,.\,2}\, l\, x^2 - \ldots,$$

$$\sin\omega^{-\delta} = 1 - \delta\, l \sin\omega + \frac{\delta^2}{1\,.\,2}\, l \sin\omega^2 - \ldots;$$

daher

$$x^{-\delta} \sin\omega^{-\delta} = 1 - \delta\,(l\,x + l \sin\omega) + \ldots;$$

und der zweite Theil des Werthes von y wird, indem man die höheren Potenzen von δ als die erste vernachlässigt,

$$B_1 \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\, d\omega$$

$$- \, B_1\, \delta \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\,(l\,x + l \sin\omega)\, d\omega\,;$$

ebenso wird der erste Theil von y

$$B \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\, d\omega + B\,\delta \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\, l \sin\omega\, d\omega\,.$$

Addiren wir diese beiden Ausdrücke und setzen $B + B_1 = C$, während C eine willkürliche Constante bezeichnet, so erhalten wir

$$y = C \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\, d\omega$$

$$+ \, (B - C)\; \delta \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\,(l x + l \sin\omega)\, d\omega$$

$$+ \, B\delta \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\, l \sin\omega\, d\omega\,.$$

Lassen wir jetzt δ gegen Null und $B\delta$ gegen eine willkürliche Constante C_1 convergiren, so erhält man für den vollständigen Werth von y, indem man zur Grenze übergeht und bemerkt dass $l\,x + 2\,l \sin\omega = l\,(x \sin\omega^2)$,

$$y = C \int_0^\pi \cos\,(x \sqrt{n} \cos\omega)\, d\omega$$

$$+ C_1 \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\, l\,(x \sin\omega^2)\, d\omega\,.$$

Dies ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$\text{(6)} \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{1}{x}\frac{d y}{d x} + n y = 0\,.$$

94. Es ist gut, wenn man bemerkt, dass allemal wenn m eine positive oder negative gerade Zahl ist, einer der beiden Theile des durch (3) gegebenen Werthes von y ohne irgend ein Integrationszeichen ausgedrückt werden kann; was den anderen betrifft, so ist er nicht zu nehmen, da m ausserhalb der Grenzen 0 und 2 liegt. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir allgemein durch A_p das bestimmte Integral $\int_0^\pi \cos(\lambda \cos\omega) \sin\omega^p\, d\omega$; die theilweise Integration liefert die folgende Relation, $p > 3$ vorausgesetzt:

$$A_p = \frac{(p-1)(p-2)}{\lambda^2} A_{p-2} - \frac{(p-1)(p-3)}{\lambda^2} A_{p-4}\,.$$

Wenn p eine gerade Zahl ist, so gelangt man vermöge dieser Reductionsformel zu A_0 oder $\int_0^\pi \cos(\lambda \cos\omega)\, d\omega$, welches Integral nicht exact als Function von λ erhalten werden kann. Wenn dagegen p ungerade, so ist A_p auf A_3 und A_1 zurückgeführt, welche sich exact berechnen lassen und respective zu Werthen haben

$$A_1 = \frac{2 \sin\lambda}{\lambda}\,, \quad A_3 = \frac{4}{\lambda^3}(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\,;$$

woraus hervorgeht, dass eines der beiden particulären Integrale, welche in die Gleichung (3) eingehen, immer in x unter endlicher Form ausgedrückt werden kann, wenn m eine gerade positive oder negative Zahl ist.

95. Man kann das Integral der Gleichung (1) noch unter einer anderen Form darstellen, welche den bisher betrachteten oft vorzuziehen ist, und besonders wenn m eine gerade positive oder negative Zahl ist.

Setzen wir

$$y = A x^\alpha \varphi(x) + A_1 x^{\alpha+1} \varphi'(x) + A_2 x^{\alpha+2} \varphi''(x) + \cdots,$$

während die Constanten α, A, A_1, A_2 etc. unbestimmt sind, sowie die Function $\varphi(x)$, deren successive Ableitungen wir

durch $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ etc. bezeichnen. Substituiren wir diesen Werth für y in der Gleichung (1), und untersuchen wir ob es möglich ist, die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x gleich Null zu machen.

Zweimal hinter einander y differentiirend, findet man

$$\frac{m}{x}\frac{dy}{dx} =$$

$$mA\alpha x^{\alpha-2}\varphi(x) + mA_1(\alpha+1)x^{\alpha-1}\varphi'(x) + mA_2(\alpha+2)x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots$$
$$+ mAx^{\alpha-1}\varphi'(x) \qquad + mA_1x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\varphi(x) + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x) + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots$$
$$+ 2A\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x) + 2A_1(\alpha+1)x^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots$$
$$+ Ax^{\alpha}\varphi''(x) + \ldots.$$

Wenn wir diese Entwicklungen in der Gleichung (1) substituiren und den Coëfficienten des allgemeinen Gliedes mit $x^{\alpha+p-2}$ gleich Null setzen, so finden wir

$$[(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} + A_{p-2}]\varphi^p(x)$$
$$+ nA_{p-2}\varphi^{p-2}(x) = 0;$$

und damit diese Relation zwischen $\varphi^p(x)$ und $\varphi^{p-2}(x)$ einfacher sei und nicht von p abhänge, so setzen wir

$$(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} = 0;$$

woraus resultirt

$$\varphi^p(x) + n\varphi^{p-2}(x) = 0,$$

eine Gleichung welcher man genügt, was auch die ganze Zahl p sei, indem man setzt

$$\varphi''(x) + n\varphi(x) = 0,$$

woraus man schliesst

$$\varphi(x) = C\sin.x\sqrt{n} + C'\cos.x\sqrt{n},$$

während C und C' willkürliche Constanten. Aber diese Rechnung ist nicht auf alle Glieder der Reihe anwendbar, welche aus der Substitution des Werthes von y in der Gleichung (1) resultirt; sie setzt voraus dass p wenigstens gleich 2 sei, und es ist nothwendig besonders die beiden Glieder zu betrachten, welche die Potenzen $\alpha-1$ und $\alpha-2$ von x enthalten. Indem man ihre respectiven Coëfficienten gleich Null setzt, erhält man

$$\alpha(\alpha-1) + m\alpha = 0, \quad A_1(\alpha+1)(\alpha+m) + A(m+2\alpha) = 0.$$

Die erste giebt

$$\alpha = 0, \text{ oder } \alpha = 1 - m,$$

und die zweite führt, in diesen beiden Fällen, zu der Gleichung

$$A_1 = - A.$$

Betrachten wir successive die Entwicklungen, welche diesen beiden Werthen von α entsprechen.

1. Es sei $\alpha = 1 - m$; die allgemeine Relation zwischen A_p und A_{p-1} wird

$$p(p - m + 1) A_p = (m - 2p) A_{p-1}.$$

Indem man p successive in $p - 1$, $p - 2$ etc. verändert, wird man A_p als Function von A_1 bestimmen; und da $A_1 = - A$, so wird man den allgemeinen Coëfficienten A_p als Function von A kennen, welches unbestimmt bleibt, aber gleich der Einheit genommen werden kann, wegen der Constanten C, C'.

Man findet auf diese Weise

$$A_p = - \frac{(m-2p)(m-2p+2)\ldots(m-4)}{(p-m+1)(p-m)\ldots(3-m)} \cdot \frac{1}{1.2\ldots p},$$

und der Werth von y erhält den Ausdruck

$$y = x^{1-m} \left\{ \begin{array}{l} C \sin.x\sqrt{n} + C' \cos.x\sqrt{n} - x \dfrac{d(C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n})}{dx} + \ldots \\ + \dfrac{(m-4)\ldots(m-2p)}{(m-3)\ldots(m-p+1)} \dfrac{(-x)^p}{1.2\ldots p} \dfrac{d^p(C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n})}{dx^p} + \ldots \end{array} \right\}.$$

Wenn man für einen gewissen Coëfficienten A_p einen der Null gleichen Werth findet, so wird die mit dem vorhergehenden Gliede abbrechende Reihe der Differentialgleichung genügen, und das allgemeine Integral wird durch eine endliche Anzahl von Gliedern gegeben. Dies ereignet sich allemal, wenn m eine positive gerade Zahl ist.

2. Es sei jetzt $\alpha = 0$; die Relation zwischen A_{p-1} und A_p wird

$$A_p = - \frac{m + 2p - 2}{p(m + p - 1)} A_{p-1};$$

woraus man zieht, wieder $A = 1$ nehmend,

$$A_p = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2p-2)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)} \cdot \frac{(-1)^p}{1.2\ldots p};$$

und der Werth von y ist

$$y = C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n} - x\frac{d(C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n})}{dx} + \ldots$$

$$+ \frac{(-x)^p(m+2)(m+4)\ldots(m+2p-2)}{1.2\ldots p(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)} \frac{d^p(C\sin x\sqrt{n} + C'\cos x\sqrt{n})}{dx^p} + \ldots$$

Diese Reihe bricht wie die vorige ab, wenn ein Glied Null wird; was sich immer ereignet, wenn m eine negative gerade Zahl ist. Woraus man die wichtige Folgerung zieht, dass das allgemeine Integral der Gleichung (1) immer durch eine endliche Anzahl von Gliedern sich ausdrücken lässt, wenn m eine positive oder negative gerade Zahl ist.

96. Die Riccati'sche Gleichung. — Die so benannte Gleichung ist

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m.$$

Wenn man mit Euler $y = \frac{\frac{du}{dx}}{au}$ setzt, so erhält man, $ab = A$ machend,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Ax^m u,$$

und Alles kommt darauf an, diese lineare Gleichung der zweiten Ordnung zu integriren. Der allgemeine Werth von u wird von der Form sein

$$u = Cu_1 + C'u_2,$$

wo C und C' willkürliche Constanten; daraus resultirt

$$\frac{du}{dx} = C\frac{du_1}{dx} + C'\frac{du_2}{dx},$$

und folglich

$$y = \frac{1}{a}\frac{C\frac{du_1}{dx} + C'\frac{du_2}{dx}}{Cu_1 + C'u_2} = \frac{1}{a}\frac{\frac{C}{C'}\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx}}{\frac{C}{C'}u_1 + u_2}.$$

Dieser, eine willkürliche Constante $\frac{C}{C'}$ enthaltende Werth wird das allgemeine Integral der vorgelegten sein.

Es ist also die Gleichung zu integriren

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Ax^m u.$$

Man kann diese Gleichung zurückführen auf eine andere von der Form der Gleichung (1), indem man die unabhängige

Variable x vertauscht, $x^p = kz$ setzend, wo k und p unbestimmte Constanten. Man findet auf diese Weise

$$\frac{p^2}{k^2} x^{2p-2} \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{p(p-1)}{k} x^{p-2} \frac{du}{dz} - A x^m u = 0.$$

Die beiden extremen Glieder werden x nicht mehr enthalten, wenn man $2p - 2 = m$ setzt, woraus $p = \frac{m}{2} + 1$, und durch x^m dividirt. Wenn man ausserdem mit $\frac{p^2}{k^2}$ dividirt, und x in z ausdrückt, so erhält man

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - \frac{Ak^2}{\left(\frac{m}{2}+1\right)^2} u = 0;$$

und wenn man, um diese Gleichung zu vereinfachen, k durch die Bedingung bestimmt

$$Ak^2 = \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2, \text{ woraus } k = \frac{\frac{m}{2}+1}{\sqrt{A}},$$

so hat man folgende Gleichung zu integriren

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\left(\frac{m}{m+2}\right)}{z} \cdot \frac{du}{dz} - u = 0,$$

welche in die Gleichung (1) übergeht, indem man in dieser m und n in $\frac{m}{m+2}$ und -1 verwandelt. Hieraus folgt nun:

1. Wenn $\frac{m}{m+2}$ eine positive oder negative gerade Zahl ist, so lassen sich die beiden Werthe von u ausdrücken durch eine endliche Anzahl von Gliedern in z, und folglich in x.

Es sei also

$$\frac{m}{m+2} = \pm 2i,$$

worin i eine positive ganze Zahl ist; man zieht hieraus

$$m = \frac{\mp 4i}{\pm 2i - 1},$$

wo die oberen und unteren Zeichen zusammengehören. Dieser Ausdruck reducirt sich auf folgende Form:

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1}.$$

Also kann man die Riccati'sche Gleichung vollständig integriren, wenn m in dieser Formel enthalten ist.

2. Wenn $\frac{m}{m+2}$ zwischen 0 und 2 liegt, so lässt sich der allgemeine Werth von u durch die Formel (3) ausdrücken. Man sieht zunächst, dass wenn m positiv, $\frac{m}{m+2}$ nothwendig zwischen 0 und 2 liegt, und die Riccati'sche Gleichung wird dann mittelst zweier einfachen bestimmten Integrale integrirt.

Wenn m negativ, so sei $m = -m'$, und man hat

$$\frac{m'}{m'-2} > 0, \quad \frac{m'}{m'-2} < 2:$$

die erste verlangt $m' > 2$, und die zweite $m' > 4$. Also wird man noch in derselben Weise die Gleichung von Riccati integriren, wenn m zwischen -4 und $-\infty$ liegt. Also nur für die Werthe von m zwischen 0 und -4 lässt sich das gesuchte Integral nicht durch zwei einfache bestimmte Integrale ausdrücken.

Die Formel (3) wird durch Vertauschung von m mit $\frac{m}{m+2}$ und n mit -1

$$u = B \int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1} \cos\omega) \sin\omega^{\frac{-2}{m+2}} d\omega$$
$$+ B_1 z^{\frac{2}{m+2}} \int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1} \cos\omega) \sin\omega^{\frac{2}{m+2}} d\omega.$$

Indem man z durch seinen Werth $\frac{2\sqrt{A}}{m+2} x^{\frac{m}{2}+1}$ ersetzt, und $\frac{2\sqrt{A}}{m+2} = \mu$ macht, kommt

$$u = B \int_0^\pi \cos\left(\mu x^{\frac{m}{2}+1} \sqrt{-1} \cos\omega\right) \sin\omega^{\frac{-2}{m+2}} d\omega$$
$$+ B' x \int_0^\pi \cos\left(\mu x^{\frac{m}{2}+1} \sqrt{-1} \cos\omega\right) \sin\omega^{\frac{2}{m+2}} d\omega.$$

Wenn man die Imaginären fortschafft, so wird diese Formel

$$u = B \int_0^\pi \left(e^{\mu x^{\frac{m}{2}+1} \cos \omega} + e^{-\mu x^{\frac{m}{2}+1} \cos \omega} \right) \sin \omega^{\frac{-2}{m+2}} d\omega$$

$$+ B' x \int_0^\pi \left(e^{\mu x^{\frac{m}{2}+1} \cos \omega} + e^{-\mu x^{\frac{m}{2}+1} \cos \omega} \right) \sin \omega^{\frac{2}{m+2}} d\omega,$$

worin B und B' zwei willkürliche Constanten sind; und das Verhältniss $\frac{B}{B'}$ ist die einzige Constante, welche das Integral der Riccati'schen Gleichung enthalten wird.

3. Wenn m zwischen den Grenzen 0 und -4 liegt, so besteht nur ein einziges der beiden bestimmten Integrale, und das allgemeine Integral wird durch die Formel (2) gegeben. Es sei u_1 der particuläre Werth von u, so findet man

$$y = \frac{\frac{d u_1}{d x}}{a u_1} + \frac{1}{u_1^2 \left(C_1 + a \int \frac{d x}{u_1^2} \right)},$$

wo C_1 eine willkürliche Constante. Dieser Ausdruck ist weniger einfach als der obige, und gerade in diesem Intervall, zwischen 0 und -4, ist es, wo die in der Formel $\frac{-4i}{2i \pm 1}$ enthaltenen Werthe liegen, für welche man exact integriren kann. Wenn m zum Werthe die erste Grenze 0 hätte, so wäre die zu integrirende Gleichung

$$\frac{d^2 u}{d z^2} - u = 0,$$

welche giebt

$$u = C e^z + C_1 e^{-z}.$$

Wenn m zum Werthe die zweite Grenze -4 hat, so hat man die Gleichung zu betrachten

$$\frac{d^2 u}{d z^2} + \frac{2}{z} \frac{d u}{d z} - u = 0,$$

welche schon behandelt wurde, und sich, indem man $u = \frac{v}{z}$ setzt, reducirt auf

$$\frac{d^2 v}{d z^2} - v = 0,$$

woraus man zieht

$$v = Ce^z + C_1 e^{-z} ,$$

und folglich

$$u = \frac{Ce^z + C_1 e^{-z}}{z} .$$

4. Zwischen den Grenzen 0 und —4 giebt es einen Werth, welcher die beiden Integrale illusorisch macht: nämlich $m = -2$. In diesem Falle wird die Gleichung zwischen u und x, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Au}{x^2}$; sie gehört in eine Classe von Gleichungen, zu deren Integration wir das Mittel gegeben haben (Nr. 56). Ihr allgemeines Integral ist $u = Cx^{k'} + C_1 x^{k''}$, wo k' und k'' die Wurzeln der Gleichung $k^2 - k - A = 0$.

97. Es sei ferner die nicht lineare Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = be^{px} ;$$

setzen wir wie vorher

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx} ,$$

so wird die vorgelegte

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abue^{px} .$$

Es sei

$$\frac{2\sqrt{ab}}{p} e^{\frac{1}{2}px} = z ;$$

hieraus resultirt

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} - u = 0 ,$$

was ein besonderer Fall der Gleichung (6) ist. Man hat also

$$u = C \int_0^\pi cos\,(z\sqrt{-1}\,cos\,\omega)\,d\omega$$

$$+ C_1 \int_0^\pi cos\,(z\sqrt{-1}\,cos\,\omega)\;l\,(z\,sin\,\omega^2)\,d\omega ,$$

oder

$$u = C' \int_0^\pi \left(e^{z\,cos\,\omega} + e^{-z\,cos\,\omega}\right) d\omega$$

$$+ C'' \int_0^\pi \left(e^{z\,cos\,\omega} + e^{-z\,cos\,\omega}\right) l\,(z\,sin\,\omega^2)\,d\omega .$$

Es erübrigt nur z seinen Werth in x zu substituiren, und y wird aus u abgeleitet wie in dem Falle der Riccati'schen Gleichung.

98. Betrachten wir noch die folgende, in den physikalischen Anwendungen vorkommende Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left[p^2 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] y = 0 ;$$

setzen wir $y = x^{n+1} z$, so kommt

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + \frac{2(n+1)}{x} \frac{dz}{dx} + p^2 z = 0 ,$$

welche in der Gleichung (1) steckt, wenn man dort m in $2(n+1)$ und n in p^2 verwandelt.

Setzt man n positiv und ausserdem beliebig voraus, so kann man, da $2(n+1)$ nicht zwischen 0 und 2 liegt, nur ein particuläres Integral durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Sein Ausdruck ist

$$z = A \int_0^\pi \cos(px \cos\omega) \sin\omega^{2n+1} \, d\omega ,$$

und man kann, wie wir dies schon sahen, aus ihm das vollständige Integral ableiten. Der aus ihm folgende Werth von y ist

$$y = A x^{n+1} \int_0^\pi \cos(px \cos\omega) \sin\omega^{2n+1} \, d\omega .$$

In dem besonderen Falle, wo $n = 1$, wird die vorgelegte Gleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \left(p^2 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0 ,$$

und man hat

$$y = A x^2 \int_0^\pi \cos(px \cos\omega) \sin\omega^3 \, d\omega ,$$

und die Integration ausführend

$$y = B \left(\frac{\sin px}{px} - \cos px\right) ,$$

wo B eine willkürliche Constante. Indem man sie als Function von x betrachtet, wird man leicht das vollständige Integral bestimmen.

Bestimmung von bestimmten Integralen durch Integration von Differentialgleichungen.

---

99. Die Auffindung eines bestimmten Integrals kann bisweilen zurückgeführt werden auf die Integration einer Differentialgleichung, welche sich auf eine der unter dem Zeichen $\int$ vorhandenen Constanten bezieht.

Die Ableitungen dieses Integrals nach diesen Constanten sind zwischen denselben Grenzen genommene Integrale, und wenn man durch diese Differentiationen das erste Integral wieder hervorbringen kann, so erhält man durch Elimination desselben eine Gleichung zwischen seinen Ableitungen nach einer der Constanten. Kann man dieselbe integriren, so wird man einen Ausdruck haben, welcher das bestimmte Integral als besonderen Fall enthält, und es kommt nur noch darauf an, die willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dass er sich auf dieses Integral selbst reducirt.

100. Es sei z. B. das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\, d\omega .$$

Betrachten wir es als eine Function von x, und setzen

$$y = \int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\, d\omega . \tag{1}$$

Zweimal nach x differentiirend, kommt

$$\frac{dy}{dx} = -\int_0^\pi sin\,(x\,cos\,\omega)\;cos\,\omega\;d\,\omega\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\int_0^\pi cos\,(x\,cos\,\omega)\;cos\,\omega^2\,d\,\omega\,.$$

Um diese Ausdrücke leichter vergleichbar zu machen, muss man in den zweiten $cos\,(x\,cos\,\omega)$ statt $sin\,(x\,cos\,\omega)$ einführen; und dies erreicht man durch theilweise Integration. Man erhält auf diese Weise

$$-\,sin\,\omega\;sin\,(x\,cos\,\omega) - x\int sin\,\omega^2\,cos\,(x\,cos\,\omega)\;d\,\omega\,.$$

Der erste Theil verschwindet an den Grenzen 0 und π, und es kommt

$$\frac{dy}{dx} = -\,x\int_0^\pi cos\,(x\,cos\,\omega)\;sin\,\omega^2\;d\,\omega\,.$$

Indem man durch x dividirt und zu der dritten Gleichung addirt, erhält man

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} = -\int_0^\pi cos\,(x\,cos\,\omega)\;d\,\omega\,.$$

Da das gesuchte Integral so reproducirt ist, so braucht man es nur durch y zu ersetzen, um die gesuchte Differentialgleichung zu haben, welche ist

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} + y = 0\,.$$

101. Die Bestimmung von $\int_0^\pi cos\,(x\,cos\,\omega)\,d\,\omega$ ist somit auf die Integration der Gleichung (2) zurückgeführt, welche wir in Nr. 87 behandelt haben. Aber da wir nur ein particuläres Integral derselben entwickelt haben, so kann man nicht wissen, ob dies dasjenige ist, welches den Werth des bestimmten Integrals geben wird. Man sieht also, dass man im Allgemeinen das vollständige Integral der Differentialgleichung, zu welcher man geführt wird, kennen muss, um daraus den Werth des gesuchten bestimmten Integrals ableiten zu können.

Indessen ist es im gegenwärtigen Falle leicht, sich zu versichern, dass die als Integral der Gleichung (2) gefundene Reihe

mit $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega$ zusammenfällt, indem man der Constante einen angemessenen Werth beilegt.

In der That, man hat

$$\cos(x\cos\omega) = 1 - \frac{x^2\cos\omega^2}{2} + \frac{x^4\cos\omega^4}{1.2.3.4}\ldots + \frac{x^{2m}\cos\omega^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \ldots.$$

Multipliciren wir mit $d\omega$, und integriren zwischen 0 und π, und bemerken dabei dass

$$\int_0^\pi \cos\omega^{2m}\,d\omega = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\pi\,,$$

so kommt

$$\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega = \pi\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\right).$$

Also ist das bestimmte Integral $\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\,d\omega$ nichts Anderes als das particuläre Integral, welches wir für die Gleichung (2) gefunden hatten, wenn man die willkürliche Constante gleich π nimmt.

102. Suchen wir jetzt die Gleichung, welche das bestimmte Integral $\int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx$ bestimmen würde, das wir schon kennen.

Es sei

$$y = \int_0^\infty e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx\,,$$

man findet

$$\frac{dy}{dn} = -\int_0^\infty 2x\,e^{-m^2x^2}\sin 2nx\,dx\,.$$

Aber

$$\int 2x\,e^{-m^2x^2}\sin 2nx\,dx = \frac{-1}{m^2}\,e^{-m^2x^2}\sin 2nx$$
$$+ \frac{2n}{m^2}\int e^{-m^2x^2}\cos 2nx\,dx\,.$$

Daher

$$\frac{dy}{dn} = -\frac{2ny}{m^2}, \text{ woraus } y = Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Also ist $\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx\,dx$ enthalten in dem Ausdruck $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$, in welchem C unabhängig ist von x und n: es bleibt zu untersuchen, welchen Werth C haben muss, damit $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$ gleich diesem bestimmten Integral werde. Für $n = 0$ wird das Integral

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2} dx \text{ oder } \frac{\sqrt{\pi}}{2m},$$

und $Ce^{-\frac{n^2}{m^2}}$ reducirt sich auf C; also muss der Werth der Constante C sein $\frac{\sqrt{\pi}}{2m}$, und man hat

$$\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}\; e^{-\frac{n^2}{m^2}},$$

wie wir schon auf anderem Wege gefunden haben.

Hätte man $\int_0^\infty e^{-m^2x^2} \cos 2nx\,dx$ als Function von m betrachtet, so würde man gefunden haben

$$\frac{dy}{dm} = \left(\frac{2n^2}{m^3} - \frac{1}{m}\right) y,$$

woraus

$$y = \frac{C}{m} e^{-\frac{n^2}{m^2}};$$

und man fände

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ und } y = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}\; e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

103. Betrachten wir als letztes Beispiel das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2},$$

und setzen

$$y = \int_0^l \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2}.$$

Wir nehmen nicht sogleich die Grenze ∞, um eine Schwierigkeit zu vermeiden, von der wir bald sprechen werden. Zweimal nach a differentiirend, kommt

$$\frac{d^2 y}{d a^2} = -\int_0^l \frac{x^2 \cos a x \, d x}{1 + x^2} = y - \int_0^l \cos a x \, d x = y - \frac{\sin a l}{a},$$

und wenn man $l = \infty$ machte, so sieht man, dass das zweite Glied sich unter einer unbestimmten Form darbieten würde.

Man muss jetzt die lineare Gleichung integriren

$$\frac{d^2 y}{d a^2} - y + \frac{\sin a l}{a} = 0.$$

Wenn man zuerst das letzte Glied vernachlässigt, so findet man als Integral $y = A e^a + B e^{-a}$; indem man darauf A und B als Functionen von a betrachtet, so wird man zum allgemeinen Integrale der Gleichung, um welche es sich handelt, geführt,

$$y = C e^a + C_1{}^{-a} + \frac{e^{-a}}{2} \int_0^a \frac{e^a \sin a l \, d a}{a} - \frac{e^a}{2} \int_0^a \frac{e^{-a} \sin a l}{a} d a,$$

worin C und C_1 willkürliche Constanten.

Man muss jetzt annehmen, dass l unbegrenzt wachse, und die Grenze des zweiten Gliedes suchen.

Wenn nun l sehr gross ist, so geht $\sin a l$ durch alle Werthe von -1 bis $+1$ für einen sehr kleinen Zuwachs von a, für welchen man die anderen Factoren als constant betrachten kann. Die Elemente der Integrale zerstören sich also in diesem Intervalle, und so verhält es sich von irgend einem endlichen Werthe von a an bis ins Unendliche. Man braucht also nur die Elemente dieser Integrale zu betrachten zwischen 0 und einem unendlich kleinen Werthe von a. Aber dann kann man e^a und e^{-a} durch die Einheit ersetzen, die Integrale reduciren sich auf $\frac{\pi}{2}$, und die beiden letzten Glieder vereinigen sich mit den beiden ersten.

Indem man die Grenze des Integrals $\int_0^l \frac{\cos a x \, d x}{1 + x^2}$, oder $\int_0^\infty \frac{\cos a x \, d x}{1 + x^2}$ durch y bezeichnet, hat man also

$$y = Ce^a + C_1 e^{-a} .$$

Es bleiben nur noch die Constanten C, C_1 zu bestimmen.

Wenn aber a positiv ist, so wächst Ce^a unbegrenzt mit a, was nicht sein kann; daher $C = 0$. Ferner wird $\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1+x^2}$ gleich $\frac{\pi}{2}$ für $a = 0$; daher $C_1 = \frac{\pi}{2}$, und

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a} .$$

Wäre a negativ, so hätte man $C_1 = 0$ und $C = \frac{\pi}{2}$, folglich

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{a} .$$

104. Differentiirt man diese Gleichung nach a, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax\, dx}{1+x^2} = \frac{-\pi}{2} e^{a} ,$$

wo a negativ. Differentiirt man die auf das positive a sich beziehende Gleichung, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} .$$

Summation von Reihen durch Integration von Differentialgleichungen.

---

105. Wir sahen, wie man das Integral einer Differentialgleichung in eine Reihe entwickeln kann; aber man kann umgekehrt sich vornehmen, die Differentialgleichung zu finden, deren Integral eine gegebene Reihe sein würde. Wenn diese Gleichung vollständig unter endlicher Form integrirt werden kann, so vermag man die Function zu bestimmen, von welcher man die Entwicklung hatte. Um diese Gleichung zu erhalten, differentiirt man ein- oder mehrmal die Reihe, oder andere aus ihr abgeleitete Reihen, um die gesuchte zu reproduciren, welche man dann eliminiren kann. Wenn sie sich nicht reproducirt, man aber zu einer Reihe gelangt, welche man zu summiren weiss, so erhält man ebenfalls die gesuchte Gleichung.

106. Es sei z. B. die Reihe

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

so findet man, zweimal differentiirend,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -1 + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots;$$

da diese Reihe, bis auf das Zeichen, die gesuchte ist, so kann man sie eliminiren, und erhält die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -y.$$

Nach der Theorie der linearen Gleichungen findet man

$$y = A \cos x + B \sin x,$$

und A und B sind die zu bestimmenden Constanten.

Hierzu bemerkt man, dass die Reihe denselben Werth behält, wenn man das Zeichen von x ändert; also $B = 0$. Ferner reducirt sie sich auf 1 für $x = 0$; also $A = 1$, und die Reihe ist gleich $\cos x$, wie man übrigens wusste.

107. Es sei noch die Reihe

$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} - \frac{x^5}{4.5} + \cdots,$$

daraus leitet man ab

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = -1 + l(1+x),$$

in diesem Falle ist man zu einer Reihe gelangt, welche mit der vorgelegten nicht identisch ist, aber summirt werden konnte.

Man muss jetzt die Gleichung integriren

$$\frac{dy}{dx} = -1 + l(1+x), \text{ woraus } y = -x + \int l(1+x)\, dx,$$

welches giebt

$$y = C - 2x + (1 + x)\, l(1 + x).$$

Die Constante C muss gleich 1 sein, weil die Reihe sich auf 1 reducirt für $x = 0$; also

$$y = 1 - 2x + (1 + x)\, l(1 + x).$$

Man hätte noch einmal differentiiren können, und würde erhalten haben

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1 + x};$$

dann hätte man die Gleichung integriren müssen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{1 + x},$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = l(1 + x) + C.$$

Um C zu bestimmen, würde man bemerken, dass man $\frac{dy}{dx} = -1$ hat für $x = 0$; also $C = -1$, und

$$\frac{dy}{dx} = -1 + l(1+x).$$

Fortfahren würde man wie oben.

108. Betrachten wir zuletzt noch die Reihe

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots;$$

sie giebt zunächst

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2.4} - \frac{x^5}{2^2.4^2.6} + \cdots.$$

Um den letzten Factor aus jedem Nenner wegzubringen, multipliciren wir mit x, und differentiiren darauf, so kommt

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2^2.4^2} + \frac{x^7}{2^2.4^2.6^2}$$

$$= -x\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots\right).$$

Man hat so die vorgelegte Reihe reproducirt, und eliminirend erhält man

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Und in der That haben wir im Vorhergehenden erkannt, dass diese Differentialgleichung als particuläres Integral die vorgelegte Reihe hat; aber wir bemerken hier, wie wir es oben bei den bestimmten Integralen gethan haben, dass es im Allgemeinen nöthig ist das vollständige Integral der Differentialgleichung, zu welcher man gelangt, zu kennen.

Anwendung der Differentialgleichungen zur Auffindung von Functionen, von welchen man gewisse charakteristische Eigenschaften kennt.

---

109. Es sei vorgelegt eine solche Function $z = \varphi(x)$ zu finden, dass man für jeden Werth von x und y habe

(1) $$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y).$$

Wenn man diese Gleichung in Bezug auf x differentiirt, y als constant betrachtend, so hat man

$$\varphi'(x) = \varphi'(x + y);$$

woraus man schliesst, dass $\varphi'(x)$ constant ist, was auch x sei, und dass man folglich hat

$$\frac{dz}{dx} = a,$$

wo a eine beliebige Constante bezeichnet. Man folgert daraus

(2) $$z = ax + b,$$

wo b eine neue willkürliche Constante.

Die Function φ, welche der Gleichung (1) genügt, ist daher nothwendig unter denjenigen enthalten, welche die Formel (2) darstellt. Aber die Umkehrung ist nicht sicher, und man muss die Constanten a und b so zu bestimmen suchen, dass die Substitution des gefundenen Werthes von z die Gleichung (1) identisch macht. Man findet als Resultat dieser Substitution

$$ax + b + ay + b = a(x + y) + b,$$

welches verlangt dass man $b = 0$ habe, woraus $z = ax$ resultirt.

Die allgemeinste Auflösung der Aufgabe wird also durch die Formel

$$\varphi(x) = a x$$

gegeben, wo a eine beliebige Constante.

110. Suchen wir jetzt die Function, welche bestimmt wird durch die allgemeine Bedingung

(1) $$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy).$$

Indem man nach x differentiirt, kommt

$$\varphi'(x) = y\,\varphi'(xy).$$

Dieselbe Gleichung (1) nach y differentiirend, erhält man

$$\varphi'(y) = x\,\varphi'(xy).$$

Aus den beiden letzten zieht man

$$x\,\varphi'(x) = y\,\varphi'(y);$$

also ist das Product $x\,\varphi'(x)$ constant, und wenn man $\varphi(x) = z$ setzt, so hat man, durch a eine beliebige Constante bezeichnend, $x\dfrac{dz}{dx} = a$, woraus man zieht

$$dz = \frac{a\,dx}{x}, \quad z = a l x + b,$$

wo b eine willkürliche Constante. In der Gleichung (1) substituirend, findet man

(2) $$a l x + b + a l y + b = a l xy + b,$$

daher

$$b = 0 \text{ und } z = a l x,$$

wo a beliebig.

Also wird die allgemeinste Auflösung der Aufgabe gegeben durch die Formel

$$\varphi(x) = \log x,$$

während die Basis des Logarithmensystems beliebig ist.

111. Legen wir uns jetzt vor, die Function $\varphi(x)$ zu finden aus der Bedingung

(1) $$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x + y).$$

Diese Gleichung nach x und y differentiirend, erhält man die beiden folgenden

$$\varphi'(x)\,\varphi(y) = \varphi'(x + y),$$
$$\varphi(x)\,\varphi'(y) = \varphi'(x + y);$$

woraus man schliesst

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = a,$$

wo a eine Constante. Setzt man daher $\varphi(x) = z$, so hat man

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = a,$$

woraus

$$\frac{dz}{z} = a\,dx, \quad l\,\frac{z}{b} = ax, \quad z = b\,e^{ax},$$

wo b willkürlich. In der Gleichung (1) substituirend, erhält man

(2) $$b\,e^{ax} \cdot b\,e^{ay} = b\,e^{a(x+y)},$$

welches verlangt dass man habe $b^2 = b$, und folglich $b = 1$, denn man kann nicht nehmen $b = 0$. Die gesuchte Function hat also zum Ausdruck

$$\varphi(x) = e^{ax},$$

wo a beliebig.

Ist die Constante a imaginär und von der Form $m \pm n\sqrt{-1}$, so hat man

$$\varphi(x) = e^{mx}\,(\cos nx \pm \sqrt{-1}\,\sin nx).$$

112. Es sei noch vorgelegt die Bedingung

(1) $$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy).$$

Diese Gleichung in Bezug auf x und y differentiirend, erhält man

$$\varphi'(x)\,\varphi(y) = y\,\varphi'(xy),$$
$$\varphi(x)\,\varphi'(y) = x\,\varphi'(xy).$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$x\,\varphi'(x)\,\varphi(y) = y\,\varphi'(y)\,\varphi(x),$$

daher

$$\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{y\,\varphi'(y)}{\varphi(y)} = a,$$

wo a eine beliebige Constante. Man hat also, $\varphi(x) = z$ machend,

$$\frac{x}{z}\,\frac{dz}{dx} = a;$$

daraus leitet man ab

$$\frac{dz}{z} = a\,\frac{dx}{x}, \quad l\,\frac{z}{b} = a\,l\,x = l\,(x^a),$$

wo b eine willkürliche Constante. Man hat somit

$$z = b\,x^a.$$

In der Gleichung (1) substituirend, kommt

(2) $$b x^a . b y^a = b x^a y^a ;$$

daher $b = 1$, und die gesuchte Function hat zum Ausdruck

$$\varphi(x) = x^a ,$$

wo a eine beliebige Constante.

Für $a = m \pm n\sqrt{-1}$ nimmt die Function die Form an

$$\varphi(x) = x^m \left(cos\,(n\,lx) \pm \sqrt{-1}\; sin\,(n\,lx) \right) .$$

113. Als letztes Beispiel dieser Gattung von Aufgaben geben wir diejenige, welche sich bezieht auf die Bestimmung der Resultante von zwei gleichen Kräften, welche irgend einen Winkel mit einander machen.

Man wird in dieser Untersuchung durch sehr einfache Betrachtungen, welche wir nicht hersetzen, zu der Gleichung geführt:

(1) $$\varphi(x + y) + \varphi(x - y) = \varphi(x)\,\varphi(y) ;$$

x bezeichnet den halben Winkel der beiden Kräfte, und $\varphi(x)$ das Verhältniss der Resultante zu einer von ihnen. Wenn nun der Winkel der Kräfte Null ist, so ist die Resultante gleich ihrer Summe; und wenn er gleich zwei rechten wird, so ist sie Null: man hat also die beiden besonderen Bedingungen, indem man $\varphi(x)$ durch z bezeichnet:

(2) $$\begin{cases} z = 2 \text{ für } x = 0 \\ z = 0 \text{ für } x = \dfrac{\pi}{2} , \end{cases}$$

und überdies kann z für keinen Werth von x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ Null werden. Man bemerkt ausserdem, dass die Aufgabe der Statik der Function keine Bedingung auferlegt für Werthe von x, welche nicht zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen, und für Werthe von y, die grösser sind als x. Man erkennt leicht, dass die erste der Gleichungen (2) eine unmittelbare Folge der Gleichung (1) ist; denn, macht man darin $y = 0$, so findet man

$$2\,\varphi(x) = \varphi(x)\,\varphi(0) ,$$

woraus $\varphi(0) = 2$ hervorgeht.

Dies vorausgesetzt, erhält man, die Gleichung (1) zweimal nach x und zweimal nach y differentiirend,

$$\varphi''(x + y) + \varphi''(x - y) = \varphi''(x)\,\varphi(y) ,$$
$$\varphi''(x + y) + \varphi''(x - y) = \varphi(x)\,\varphi''(y) ;$$

woraus man schliesst

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)} = a,$$

wo die Constante reell, weil $\varphi(x)$ und $\varphi''(x)$ es sind.

Diese Gleichung wird, indem man $\varphi(x)$ durch z ersetzt,

(3) $$\frac{d^2 z}{d x^2} - a z = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung wird eine verschiedene Form haben, je nachdem man hat $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.

1. Es sei zuerst $a = 0$, so resultirt

$$z = Cx + C_1,$$

und in der Gleichung (1) substituirend, müsste man haben, für unendlich viele Werthe von x und y,

$$2Cx + 2C_1 = C^2 xy + CC_1 y + CC_1 x + C_1^2;$$

die ähnlichen Glieder müssten also beiderseits gleich sein, woraus resultiren würde $C = 0$, und $\varphi(x)$ wäre gleich einer Constante, was unmöglich ist; man kann also nicht haben $a = 0$.

2. Es sei $a > 0$, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (3)

$$z = Ce^{x\sqrt{a}} + C_1 e^{-x\sqrt{a}};$$

in der Gleichung (1) substituirend, und

$$e^{(x+y)\sqrt{a}} = u, \quad e^{(x-y)\sqrt{a}} = v$$

setzend, was keinen Zusammenhang zwischen u und v herstellt, findet man

$$C(C-1)u + C_1(C_1-1)u^{-1} = C(1-C_1)v + C_1(1-C)v^{-1}.$$

Die Coëfficienten der unähnlichen Glieder müssen einzeln Null sein, man hat also

$$C = 0, \quad C_1 = 0,$$

oder

$$C = 1, \quad C_1 = 1.$$

Man kann aber nicht auf einmal haben $C = 0$, $C_1 = 0$, denn sonst hätte man $z = 0$, was auch x wäre, welches absurd ist. Daher kann man nur die beiden folgenden Werthe nehmen

$$C = 1, \quad C_1 = 1,$$

woraus folgen würde

$$z = e^{x\sqrt{a}} + e^{-x\sqrt{a}},$$

welcher Ausdruck aber nicht Null wird für $x = \frac{\pi}{2}$, und folglich der Aufgabe nicht genügt. Man kann somit auch nicht haben $a > 0$.

3. Nehmen wir endlich $a < 0$, und setzen $a = - m^2$; das vollständige Integral der Gleichung (3) ist

$$z = C \cos mx + C_1 \sin mx \,,$$

und weil man haben muss $z = 2$ für $x = 0$, so resultirt daraus $C = 2$, und der Werth von z wird

$$z = 2 \cos mx + C_1 \sin mx \,;$$

indem man ihn in der Gleichung (1) substituirt, und reducirt, findet man

$$C_1{}^2 \sin mx \sin my + 2 C_1 \sin my \cos mx = 0 \,,$$

und da man nicht haben kann $m = 0$, so kann man den Factor $\sin my$ wegwerfen, und es bleibt

$$C_1{}^2 \sin mx + 2 C_1 \cos mx = 0 \,,$$

welcher Gleichung für jedes x nur genügt werden kann, indem man $C_1 = 0$ setzt, woraus resultirt

$$z = 2 \cos mx \,.$$

Die Constante m wird vermöge der zweiten Gleichung (2) bestimmt, welche giebt

$$\cos \frac{m\pi}{2} = 0 \,,$$

woraus $m = 2n + 1$, während n irgend eine ganze Zahl. Aber wenn man nicht hätte $n = 0$, so würde $\cos mx$ Null werden für den Werth $x = \frac{\pi}{2(2n+1)}$, der kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$; was nicht sein kann, weil die Function z für keinen Werth von x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ Null werden kann. Also endlich

$$z = 2 \cos x \,,$$

und der Werth der gesuchten Function ist

$$\varphi(x) = 2 \cos x \,.$$

Euler'sche Integrale.

114. Legendre hat diesen Namen zwei Arten bestimmter Integrale gegeben, welche mit vieler Sorgfalt zuerst von Euler und dann von Legendre selbst untersucht worden sind. Wir werden uns darauf beschränken ihre Haupteigenschaften kennen zu lernen. Die der ersten Art sind enthalten in der Formel

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,,$$

wo p und q positiv sind; die der zweiten sind von der Form

$$\int_0^1 \left(l\,.\,\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx\,,$$

wo a positiv ist, da ausserdem das Integral unendlich sein würde.

Wenn man $l\,.\,\frac{1}{x} = y$ setzt, so giebt man ihm die Form

$$\int_0^\infty y^{a-1}\,e^{-y}\,dy\,.$$

Legendre bezeichnet die ersten durch das Symbol $(p\,,\,q)$, und die zweiten durch $\Gamma(a)$; so dass man hat

$$(p\,,\,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx\,,$$

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-x}\,dx.$$

Wir hatten schon im ersten Theile Gelegenheit von diesen letzten zu sprechen, und haben bewiesen dass wenn a ganz ist, man hat $\Gamma(a) = 1.2.3\ldots(a-1)$; und dass, welchen positiven Werth auch m und a habe,

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-mx}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{m^a}.$$

115. Man erkennt unmittelbar eine sehr einfache Eigenschaft der Integrale erster Classe, welche darin besteht, dass ihr Werth derselbe bleibt, wenn man die beiden Buchstaben p und q mit einander vertauscht. In der That, wenn man die Summe der zwei Elemente des Integrals bildet, welche zwei Werthen von x entsprechen, deren Summe gleich 1 ist, so bleibt sie offenbar dieselbe, wenn man p in q und q in p verändert, weil dadurch nur die beiden Elemente mit einander vertauscht werden. Also bleibt das Integral zwischen den Grenzen 0 und 1 dasselbe, wenn man die beiden Buchstaben p und q mit einander vertauscht; welche Eigenschaft so ausgedrückt werden kann:

$$(p, q) = (q, p).$$

116. Zeigen wir jetzt eine Haupteigenschaft der Functionen zweiter Classe, deren Untersuchung gleichzeitig mit der der ersten geschehen muss.

Betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 \left(l\,\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1);$$

die theilweise Integration liefert

$$\int \left(l\,\frac{1}{x}\right)^a dx = x\left(l\,\frac{1}{x}\right)^a + a\int\left(l\,\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,$$

und, indem man die Grenzen 0 und 1 nimmt,

$$\int_0^1 \left(l\,\frac{1}{x}\right)^a dx = a\int_0^1\left(l\,\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx,$$

was die folgende Relation ergiebt:

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a).$$

Vermöge dieser Relation, braucht man nur die Function $\Gamma(a)$ für alle Werthe von a zwischen 0 und 1 zu kennen, um sie daraus für alle Werthe von a zwischen 1 und 2 abzuleiten.

Von diesen geht man über auf die Werthe von a zwischen 2 und 3, und so unbegrenzt weiter.

Die Construction einer Tafel, welche alle möglichen Werthe der Gamma-Function ergeben würde, reducirt sich also auf die Betrachtung der zwischen 0 und 1 enthaltenen Werthe von a.

Wir wollen zeigen, dass man sogar die Werthe von $\Gamma(a)$ nur in dem Intervalle von $a = 0$ bis zu $a = \frac{1}{2}$ zu kennen braucht.

Nach dem oben Gesagten hat man die Gleichung

$$\int_0^\infty z^{b-1}\, e^{-z(1+x)}\, dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

wo b positiv ist. Multipliciren wir dieselbe mit $x^{a-1}\,dx$, während a positiv und kleiner als b, und integriren wir in Bezug auf x zwischen 0 und ∞, so haben wir

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty z^{b-1}\, x^{a-1}\, e^{-z}\, e^{-zx}\, dz\, dx = \Gamma(b) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^b}\, dx;$$

integriren wir zuerst in Bezug auf x, und berücksichtigen dass

$$\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-zx}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{z^a},$$

so wird das erste Glied der Gleichung

$$\Gamma(a) \int_0^\infty z^{b-a-1}\, e^{-z}\, dz, \text{ oder } \Gamma(a)\, \Gamma(b-a),$$

was die Gleichung giebt

$$\Gamma(a)\, \Gamma(b-a) = \Gamma(b) \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^b},$$

woraus

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

Man sieht somit, wie die Integrale von der Form $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^b}$, in welchen man $a < b$ hat, von den durch Γ bezeichneten abhängen.

Betrachten wir den besonderen Fall wo $b = 1$, und er-

innern wir uns dass $\Gamma(1) = 1$, und $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, so wird die vorhergehende Gleichung

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Wenn man daher die Werthe von $\Gamma(a)$ von $a = 0$ bis zu $a = \frac{1}{2}$ kennte, so würde diese Gleichung die Werthe der Function von $a = \frac{1}{2}$ bis zu $a = 1$ liefern. Nachher würde es sehr einfach sein, wie wir gezeigt haben, ihre Werthe von $a = 1$ bis zu $a = \infty$ zu bestimmen.

Man kann bemerken, dass die letzte Gleichung, wenn man $a = \frac{1}{2}$ macht, liefert

$$\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2 = \pi;\ \text{daher}\ \Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi};$$

somit

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Indem man $x = y^2$ setzt, kommt

$$2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi},\ \text{oder}\ \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi},$$

wie wir schon auf andere Weise gefunden haben.

117. Man kann die Integrale der ersten Classe zurückführen auf diejenigen der zweiten; was vortheilhaft ist, da diese nur von einer Variable a abhängen, wogegen die anderen von zwei Variablen p und q abhängen.

Das Integral $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ wird, indem man $x = \frac{y}{1+y}$ setzt,

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}},$$

dessen Werth nach einer Formel der vorigen Nr. ist

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

man hat daher die Gleichung

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

oder

$$(p,\,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

welche sehr einfache Formel dazu dient die Functionen der ersten Classe durch die Gamma-Functionen auszudrücken.

118. Multiplicirt man die beiden Gleichungen mit einander

$$(p,\,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$(p+q,\,r) = \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)},$$

so kommt

$$(p,\,q)(p+q,\,r) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)\,\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)};$$

und da das zweite Glied sich nicht ändert, wenn man irgend zwei der Buchstaben p, q, r mit einander vertauscht, so muss dasselbe mit dem ersten stattfinden, und man hat

$$(p,\,q)(p+q,\,r) = (p,\,r)(p+r,\,q) = (r,\,q)(q+r,\,p),$$

was eine der fundamentalen Eigenschaften der Functionen $(p,\,q)$ ist.

119. Nehmen wir jetzt an, dass die zwei Zahlen p und q gleich seien in der Function $(p,\,q)$; man hat dann

$$(a,\,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx.$$

Setzen wir $x = \frac{1}{2}(1+y)$, so kommt

$$(a,\,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{a-1}\,dy = \frac{1}{2^{2a-2}}\int_0^1 (1-y^2)^{a-1}\,dy;$$

machen wir darauf $y^2 = z$, woraus $dy = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$, so erhalten wir

$$(a,\,a) = \frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{a-1}\,dz = \frac{1}{2^{2a-1}}\left(\frac{1}{2},\,a\right),$$

oder, indem man die Functionen (p, q) durch ihre Werthe vermöge der Gamma-Functionen ersetzt,

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{2^{2a-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)},$$

woraus man zieht, mit Rücksicht darauf dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$2^{1-2a}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2a) = \Gamma(a)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right),$$

was eine neue allgemeine Eigenschaft der Gamma-Functionen constituirt.

Wir beschränken hierauf Dasjenige, welches wir über die Euler'schen Integrale zu sagen hatten, und wir verweisen wegen grösserer Details auf die *Exercices de Calcul intégral* von Legendre.

Ausdruck für die Functionen einer Variable durch bestimmte Doppelintegrale. — Entwicklung in trigonometrische Reihen.

---

120. Fourier hat eine Formel gegeben, welche von grosser Wichtigkeit ist in den Anwendungen der Analysis auf die Physik. Sie hat zum Zweck durch ein bestimmtes Doppelintegral eine Function von x darzustellen, welche von $x = -\infty$ bis zu $x = \infty$ gegeben, und überdies keiner Continuitätsbedingung unterworfen ist. Sie kann ihre Form in beliebiger Weise ändern, und einen geometrischen Ort darstellen, welcher zusammengesetzt ist aus so verschiedenen Curvenbogen als man will; dieser Ort kann z. B. mit der Axe der x vom negativen Unendlichen an bis zum positiven Unendlichen hin zusammenfallen, mit Ausnahme einer begrenzten Strecke, wo er sich aus beliebigen Curvenbogen zusammensetzt. Die einzige Bedingung, welcher die Function unterworfen ist, besteht darin, dass sie nur einen einzigen Werth haben darf für jeden der Werthe von x.

Ohne uns in irgend ein Detail einzulassen über den Weg, auf welchem Fourier diese Formel entdeckt hat, beschränken wir uns zunächst darauf ihre Richtigkeit zu erweisen.

Es sei $F(x)$ eine ganz beliebige Function von x; wir behaupten, dass man identisch haben wird

$$(1) \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos p(x-\alpha)\, dp\, d\alpha .$$

In der That, integriren wir zuerst in Bezug auf p, von 0 bis zu einem sehr grossen Werthe p; indem wir das Resultat

verdoppeln, werden wir denselben Effect hervorbringen, wie wenn wir von $-p$ bis $+p$ integrirt hätten. Wir haben darauf $F(\alpha)\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ zu integriren, und dann p unbegrenzt wachsen zu lassen.

Wenn man nun einen Werth von α betrachtet, welcher sich von x um eine endliche Grösse unterscheidet, so kann man sich p gross genug denken, damit $p(x-\alpha)$ um 2π wachse, während α um eine Grösse wächst, die so klein ist als man will und zum Werthe hat $\frac{2\pi}{p}$; in diesem Intervall wird $\frac{F(\alpha)}{x-\alpha}$ sich unmerklich ändern, und da das Integral $\int \sin p(x-\alpha)\, d\alpha$ zwischen diesen beiden Grenzen Null ist, so kann man auch $\int F(\alpha)\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$ in diesem Intervall als Null betrachten: woraus folgt, dass man sich auf die Betrachtung der Werthe von α beschränken darf, welche von x unendlich wenig verschieden sind, und es ist evident, dass die vorhergehenden Folgerungen auf diese Werthe keine Anwendung finden, weil dann $\frac{F(\alpha)}{x-\alpha}$ beträchtlich variiren kann, wenn α sehr kleine Aenderungen erleidet. Es sei daher $\alpha = x + \omega$, und ω sei eine unendlich kleine, positive und negative Grösse, damit α grösser und kleiner sei als x; wenn $F(\alpha)$ sich bei dem Werthe x nicht sprungweise ändert, so kann man $F(x+\omega)$ durch $F(x)$ ersetzen, und $\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}d\alpha$ wird sich reduciren auf

$F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$, wo ε unendlich klein ist. Aber das Integral

$\int \frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$ ist als Null zu betrachten nach dem oben Bewiesenen,

wenn ω endlich ist und man zwei um $\frac{2\pi}{p}$ verschiedene Grenzen nimmt; woraus folgt, dass je grösser man p voraussetzt, desto mehr $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$ sich $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin p\omega}{\omega}d\omega$ oder π nähert. Also ist

die Grenze von

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\frac{\sin p\,(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

$\pi\,F(x)$. Dieses Resultat verdoppelnd, hat man die Grenze von

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\cos p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha\,;$$

und folglich hat man für alle Werthe von x, für welche $F(x)$ stetig ist,

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos p\,(x-\alpha)\,dp\,d\alpha\,.$$

121. Wenn $F(x)$ plötzlich von dem Werthe A zu dem Werthe B, für einen gewissen besonderen Werth von x überginge, so müsste man $F(x-\omega)=A$, $F(x+\omega)=B$ nehmen, und die beiden Integrale betrachten

$$A\int_{-\varepsilon}^{0}\frac{\sin p\,\omega}{\omega}\,d\omega+B\int_{0}^{\varepsilon}\frac{\sin p\,\omega}{\omega}\,d\omega$$

statt des einzigen Integrals

$$F(x)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin p\,\omega}{\omega}\,d\omega\,;$$

und man sieht dass die Grenze, statt $\pi F(x)$ zu sein, $\pi\,\frac{(A+B)}{2}$ sein würde. Daraus schliesst man, dass für diese besonderen Werthe von x die Formel (1) für $F(x)$ die halbe Summe der Werthe geben wird, welche diese Function für zwei Werthe von x annimmt, von denen der eine unendlich wenig grösser und der andere unendlich wenig kleiner ist als derjenige, welchen man betrachtet.

122. Kommen wir genauer auf einen wichtigen Theil dieses Beweises zurück, auf denjenigen nämlich wo wir zeigten, dass es genüge, nur die Werthe von α, welche unendlich nahe bei x liegen, zu betrachten in dem Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,\frac{\sin p\,(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha\,.$$

Denken wir uns dass man von irgend einem, von x endlich entfernten Werthe a an, das bis ins Unendliche gehende Intervall in Theile, welche gleich $\frac{2\pi}{p}$ sind, zerlege, und betrachten wir zunächst das Integral in dem ersten Intervall. Es sei zur Abkürzung $\frac{F(\alpha)}{x-\alpha} = \varphi(\alpha)$. Man kann das Integral $\int\limits_a^{a+\frac{2\pi}{p}} \varphi(\alpha) \sin p(x-\alpha)\, d\alpha$ in die beiden folgenden abtheilen:

$$\int\limits_a^{a+\frac{\pi}{p}} \varphi(\alpha) \sin p(x-\alpha)\, d\alpha \quad \text{und} \quad \int\limits_{a+\frac{\pi}{p}}^{a+\frac{2\pi}{p}} \varphi(\alpha) \sin p(x-\alpha)\, d\alpha\,.$$

In jedem von ihnen hat der trigonometrische Factor ein constantes Zeichen, und folglich kann man ihn allein integriren, muss aber dann das Resultat mit einem Werthe von $\varphi(\alpha)$ multipliciren, der zwischen dem kleinsten und dem grössten von denen liegt, welche $\varphi(\alpha)$ in demselben Intervall annimmt. Aber

$$\int\limits_a^{a+\frac{\pi}{p}} \sin p(x-\alpha)\, d\alpha = -\int\limits_{a+\frac{\pi}{p}}^{a+\frac{2\pi}{p}} \sin p(x-\alpha)\, d\alpha$$

$$= -\frac{2}{p} \cos p(a-x) = -\frac{i}{\pi} \cos p(a-x)\,,$$

wenn i das Intervall $\frac{2\pi}{p}$ bezeichnet.

Für das zweite Intervall müsste man a in $a+\frac{2\pi}{p}$ verwandeln, was Nichts ändern würde an dem Resultate der Integration, die wir ausgeführt haben; und ebenso würde es sein für alle folgenden Intervalle: das Resultat ist beständig

$$-\frac{i}{\pi} \cos p(a-x)\,.$$

Für die erste Hälfte des Intervalls i wird es multiplicirt sein mit einem mittleren zwischen den Werthen von $\varphi(\alpha)$ in dieser

Hälfte; für die zweite mit einem mittleren Werthe von $\varphi(\alpha)$ in der zweiten Hälfte, und dieses zweite Product muss man von dem ersten abziehen. Der Rest wird geringer sein als das Product von $\frac{i}{\pi} \cos p(a - x)$ mit der Differenz des kleinsten und grössten Werthes von $\varphi(\alpha)$ in dem Intervall i, das man betrachtet. Da aber i gegen Null convergirt, indem p wächst, so sind die beiden Factoren dieses Products unendlich klein, und das Product ist ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Also convergirt das von a bis ins Unendliche genommene Integral gegen Null, während p wächst, wenn nur der Werth a von x endlich entfernt ist; was wir beweisen wollten.

Entwicklung einer beliebigen periodischen Function in eine trigonometrische Reihe, mittelst bestimmter Integrale.

123. Wenn man durch u irgend einen Bogen bezeichnet, so ist bekannt dass man hat

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cos 3u + \cdots + \cos mu = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{1}{2} u}.$$

Verwandeln wir u in $x - \alpha$, multipliciren mit einer beliebigen Function $F(\alpha)$, und integriren in Bezug auf α zwischen zwei beliebigen Grenzen a und b, so erhalten wir

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)d\alpha + \int_a^b F(\alpha)\cos(x-\alpha)d\alpha + \int_a^b F(\alpha)\cos 2(x-\alpha)d\alpha + \cdots \\ + \int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}d\alpha. \end{cases}$$

Man sieht, dass Nichts geändert wird in beiden Gliedern, wenn man x um irgend ein positives oder negatives Vielfache von 2π vermehrt, und dass sie folglich eine periodische Func-

tion darstellen, deren Periode 2π ist, was übrigens auch die ganze Zahl m sei. Wenn man nun diese Zahl unbegrenzt wachsen lässt, so nähert sich das zweite Glied einer Grenze, welche man leicht bestimmen kann, und das erste Glied wird die Reihenentwicklung der Function sein, welche diese Grenze ausdrückt.

Man bemerkt, wie in der vorhergehenden Aufgabe, dass man sich auf die Betrachtung der Werthe von α beschränken kann, die denjenigen unendlich nahe sind, welche $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)=0$ machen, da das Integral gegen Null convergirt, indem m wächst, für jedes Intervall in welchem $\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)$ eine endliche Grösse bleibt. Man hat sich daher zu beschränken auf die Werthe von α, welche unendlich wenig verschieden sind von den folgenden:

$$x,\ x \pm 2\pi, \ldots,\ x \pm 2k\pi, \text{ etc.}$$

Es sei x irgend ein zwischen a und b liegender Werth, und setzen wir voraus, dass $b-a$ höchstens gleich 2π sei; man hat allein die unendlich kleinen Werthe von $\alpha - x$ zu betrachten; man kann daher $\sin\frac{1}{2}(\alpha-x)$ durch $\frac{1}{2}(\alpha-x)$ ersetzen, und das zweite Glied der Gleichung (1) wird

$$(2) \qquad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(\alpha)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(\alpha-x)}{\alpha-x}\,d\alpha,$$

wo ε unendlich klein ist; oder, indem man $\alpha - x = \omega$ macht,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(x+\omega)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}\,d\omega.$$

Wenn $F(\alpha)$ stetig ist in der Nachbarschaft von x, so kann man $F(x+\omega)$ ersetzen durch $F(x)$, und hat

$$(3) \qquad F(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega}{\omega}\,d\omega;$$

und da dieses Integral nur für unendlich kleine Werthe von ω einen endlichen Werth hat, wenn m unbegrenzt wächst, so kann man seine Grenzen bis zu $-\infty$ und $+\infty$ ausdehnen, was die Integration erleichtert, und man findet als Resultat π. Da die Grenze des zweiten Gliedes somit $\pi F(x)$ ist, so hat man die Formel

$$(4) \quad \pi F(x) = \frac{1}{2}\int_a^b F(\alpha)\,d\alpha + \sum_1^\infty \int_a^b F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha,$$

welche die Entwicklung von $F(x)$ in eine Reihe liefert, deren allgemeines Glied von der Form ist

$$A_m \sin mx + B_m \cos mx\ .$$

Wir wollen nun einige Bemerkungen machen, welche den eigentlichen Sinn dieser Formel näher bestimmen werden.

124. Wenn man dem x einen solchen Werth giebt, dass zwischen a und b keiner der in dem Ausdruck $x \pm 2k\pi$, wo k Null und jede ganze Zahl, enthaltenen Werthe fällt, so ist das Integral (2) Null, und die Reihe hat zur Grenze die Null, für diesen Werth von x. Der Ort, welcher zur Ordinate das durch π getheilte zweite Glied der Gleichung (4) hat, besteht also aus dem Orte der Gleichung $y = F(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$, der sich unendlich oft nach beiden Richtungen der Axe der x dergestalt wiederholt, dass die correspondirenden Punkte von einander um 2π abstehen; und ferner besteht der Ort der Gleichung (4) aus allen Theilen der Axe der x zwischen diesen successiven Curven.

Wenn das Intervall $b - a$ gleich 2π ist, so reproducirt sich der zwischen $x = a$ und $x = b$ construirte Ort $y = F(x)$ unendlich oft hinter einander ohne Unterbrechung.

125. Es sei x gleich einer der Integrationsgrenzen, z. B. gleich a, und das Intervall $b - a$ sei gleich 2π, so wird das Integral (2) nur zwischen 0 und $+\varepsilon$ genommen sein, wenn α in der Nachbarschaft von a liegt, was $\frac{1}{2}F(a)$ geben wird. Aber, auch wenn α in der Nachbarschaft von b liegt, welches gleich $a + 2\pi$ ist, so wird $\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)$ unendlich klein sein; und wenn man $\alpha = a + 2\pi - \omega$ setzt, so hat man

$$\sin\frac{1}{2}(\alpha - x) = \sin\frac{\omega}{2},$$

was man wieder durch $\frac{\omega}{2}$ ersetzen wird. Man erhält auf diese Weise ein neues Integral, welches gleich $\frac{1}{2}F(b)$ ist; woraus man sieht, dass wenn man dem x einen Werth giebt, der gleich ist einer der beiden Integrationsgrenzen, die Reihe die halbe Summe der auf die beiden Grenzen bezüglichen Werthe von $F(x)$ liefert.

126. Wenn für einen zwischen a und b enthaltenen Werth von x, $F(x)$ nicht stetig ist, sondern plötzlich von dem Werthe m zu dem Werthe n übergeht, so muss man in dem Integrale (3) nehmen $F(x) = m$ zwischen $-\varepsilon$ und 0, und $F(x) = n$ zwischen 0 und $+\varepsilon$, was zum Resultate geben wird $\frac{1}{2}(m + n)$. Also giebt die Reihe für einen Werth von x, welcher $F(x)$ unstetig macht, die halbe Summe der Werthe von $F(x)$, welche diesem Werthe von x entsprechen.

127. Wir haben vorausgesetzt, dass die Differenz der Grenzen a, b höchstens 2π wäre. Untersuchen wir, was sich ereignen würde, wenn diese Differenz grösser als 2π, und die Function in dieser Ausdehnung willkürlich gegeben wäre; nehmen wir z. B. an, dass man habe $b - a = 2\pi + \delta$, wo $\delta < 2\pi$. Bei jedem Werth von x zwischen a und $a + \delta$, wird $\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)$ Null werden für $\alpha = x$ und für $\alpha = 2\pi + x$; man hat also in dem Integrale $\int_a^b$ die Werthe von α in der Nachbarschaft von x und von $2\pi + x$ zu betrachten, und folglich findet man als Werth dieses Integrals für die Werthe von x zwischen a und $a + \delta$

$$\pi[F(x) + F(x + 2\pi)];$$

ebenso würde man für jeden Werth von x zwischen $b - \delta$ und b als Werth des Integrals finden

$$\pi[F(x) + F(x - 2\pi)].$$

Für die anderen zwischen a und b enthaltenen Werthe von x

würde das Integral einfach den Werth $F(x)$ haben. Man sieht, was sich ereignen würde, wenn $b - a$ eine beliebige Anzahl mal 2π enthielte, und die Function $F(\alpha)$ in dieser ganzen Ausdehnung willkürlich gegeben wäre. Also nur indem man 2π höchstens zur Differenz der Integrationsgrenzen nimmt, wird die Reihe die Function $F(x)$ selbst für jeden zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werth darstellen. In allen Fällen würde die durch die Reihe repräsentirte Function die Periode 2π haben.

Wenn die Function $F(\alpha)$ periodisch, 2π die Ausdehnung der Periode und $b - a$ ein Vielfaches von 2π ist, so wird die Reihe offenbar $\pi F(x)$ darstellen, multiplicirt mit der Zahl $\frac{b-a}{2\pi}$; indem man daher durch diese Zahl dividirt, erhält man $\pi F(x)$, wie wenn man zwischen a und $a + 2\pi$ integrirt hätte.

128. Wenn man $a = 0$, $b = 2\pi$ nimmt, so giebt die Formel (4)

$$(5)\quad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Macht man $a = -\pi$, $b = +\pi$, so erhält man

$$(6)\quad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha)\cos m(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Man kann auf diese Weise in eine Reihe, welche nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x fortschreitet, einen Theil von irgend einer Function $F(x)$ entwickeln, der zwischen $x = 0$, $x = 2\pi$, oder $x = -\pi$, $x = +x$ enthalten ist, und der sich selbst aus mehreren Theilen zusammensetzen kann, welche Functionen von ganz verschiedenen Formen angehören. Aber dieser Theil reproducirt sich unendlich oft in beiden Richtungen; so dass für die Werthe von x ausserhalb dieser Grenzen die Reihe keine Beziehung hat zu den Werthen, welche $F(x)$ nach der Form dieser Function annehmen würde. Wenn z. B. $y = F(x)$ eine Parabel darstellt, so wird

die Reihe, indem x unbegrenzt positiv oder negativ wächst, periodisch den zwischen $x = -\pi$, $x = \pi$ enthaltenen Bogen dieser Parabel reproduciren, und keineswegs die unendliche Parabel darstellen.

129. Man kann den Formeln (5) und (6) eine grössere Allgemeinheit geben, indem man annimmt, dass die zu entwickelnde Function in irgend einem Intervall $2l$ anstatt 2π gegeben ist.

Wenn man nämlich $x = \frac{\pi z}{l}$ und $\alpha = \frac{\pi\beta}{l}$ macht, so geben diese Formeln

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right) = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right) d\beta + \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_0^{2l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right) \cos\frac{m\pi}{l}(z-\beta)\, d\beta,$$

$$F\left(\frac{\pi z}{l}\right) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right) d\beta + \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi\beta}{l}\right) \cos\frac{m\pi}{l}(z-\beta)\, d\beta;$$

oder, indem man $F\left(\frac{\pi z}{l}\right)$ durch $\varphi(z)$ darstellt, welches eine willkürliche, zwischen 0 und $2l$, oder $-l$ und $+l$ bekannte Function von z sein wird, und indem man z und β mit den häufiger angewandten Buchstaben x und α vertauscht, hat man die beiden Formeln:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2l}\int_0^{2l}\varphi(\alpha)\, d\alpha \\ &+ \frac{1}{l}\sum_1^{\infty}\int_0^{2l}\varphi(\alpha)\cos m\,\frac{\pi(x-\alpha)}{l}\, d\alpha, \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad + \dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_1^{\infty}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\,\dfrac{\pi(x-\alpha)}{l}\,d\alpha. \end{cases}$$

130. Ist die Function $\varphi(x)$ eine solche, dass man hat

$$\varphi(-x) = \varphi(x),$$

so erhält man

$$\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\sin m\,\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha = 0,$$

$$\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\,\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha = 2\int_0^{l}\varphi(\alpha)\cos m\,\frac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

die Formel (8) wird dann

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{l}\varphi(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad + \dfrac{2}{l}\displaystyle\sum_1^{\infty}\cos m\,\dfrac{\pi x}{l}\int_0^{l}\varphi(\alpha)\cos m\,\dfrac{\pi\alpha}{l}\,d\alpha, \end{cases}$$

und ebenso wird die Formel (6)

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha \\ \qquad + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_1^{\infty}\cos m x\int_0^{\pi}\varphi(\alpha)\cos m\alpha\,d\alpha. \end{cases}$$

131. Wenn man dagegen hätte $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, so würde resultiren

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \cos m \frac{\pi \alpha}{l} \, d\alpha = 0,$$

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \sin m \frac{\pi \alpha}{l} \, d\alpha = 2 \int_{0}^{l} \varphi(\alpha) \sin m \frac{\pi \alpha}{l} \, d\alpha;$$

die Formel (8) würde sich auf diese reduciren:

$$(11) \qquad \varphi(x) = \frac{2}{l} \sum_{1}^{\infty} \sin m \frac{\pi x}{l} \int_{0}^{l} \varphi(\alpha) \sin m \frac{\pi \alpha}{l} \, d\alpha,$$

und die Formel (6) auf folgende:

$$(12) \qquad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \sin m x \int_{0}^{\pi} \varphi(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha.$$

132. Da die Formel (8) eine zwischen $x = -l$ und $x = +l$ willkürliche Function darstellt, so braucht man nur l unbegrenzt wachsen zu lassen und zur Grenze überzugehen, um den Ausdruck einer beliebigen Function von $x = -\infty$ bis $x = \infty$ zu erhalten.

Wir wollen zeigen, wie indem das Zeichen Σ sich in ein Integrationszeichen verwandelt, man auf diese Weise die Fourier'sche Formel wiederfindet.

Um jede Schwierigkeit zu vermeiden, setzen wir voraus, dass $\varphi(x)$ niemals unendlich werde, und Null sei für $x = -\infty$ und $x = \infty$; so dass die durch $y = \varphi(x)$ repräsentirte Curve sich zuletzt der Axe der x unbegrenzt nähert, wenn x unbegrenzt, positiv oder negativ wächst.

Der erste Theil des zweiten Gliedes der Gleichung (8), $\frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha) \, d\alpha$ wird gegen Null convergiren, wenn l unbegrenzt wächst, und man braucht nur den zweiten Theil zu betrachten, welcher wie folgt geschrieben werden kann, indem man $\frac{\pi}{l} = \varepsilon$ setzt,

$$(13)\begin{cases}\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos 2\,\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots\\ \qquad+\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos m\,\varepsilon(x-\alpha)\,d\alpha+\ldots.\end{cases}$$

Wenn man nun $m\varepsilon = p$ macht, so kann man p betrachten als eine Variable, welcher man successive mit ε gleiche Incremente ertheilt in der allgemeinen Function

$$\int_{-l}^{+l}\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha;$$

und indem man, für jeden Werth von p, diese Function mit dem Incremente von p multiplicirt, so ist die Summe aller dieser Elemente von $p = 0$ bis zu $p = \infty$ nichts Anderes als der mit π multiplicirte Ausdruck (13). Wenn man jetzt l unbegrenzt wachsen lässt, so convergirt ε gegen Null, und die Summe (13) convergirt gegen das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^\infty\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha.$$

Die Gleichung (8) führt auf diese Weise zu der folgenden:

$$(14)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dp\int_{-\infty}^\infty\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha,$$

oder indem man $-\infty$ und $+\infty$ zu Grenzen von p nimmt, wodurch das Integral sich verdoppelt,

$$(15)\qquad \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dp\int_{-\infty}^\infty\varphi(\alpha)\cos p(x-\alpha)\,d\alpha;$$

und diese Formeln gelten für alle Werthe von x, von $-\infty$ bis $+\infty$.

Sie unterscheiden sich nicht von der früher gefundenen.

133. In dem Falle wo $\varphi(-x) = \varphi(x)$, hat man

$$\int_{-\infty}^\infty\varphi(\alpha)\sin p\alpha\,d\alpha = 0,$$

$$\int_{-\infty}^\infty\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha = 2\int_0^\infty\varphi(\alpha)\cos p\alpha\,d\alpha,$$

und die Formeln (14) und (15) reduciren sich auf diese:

$$(16) \qquad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp \cos px \int_0^\infty \varphi(\alpha) \cos p\alpha \, d\alpha \, .$$

Hat man dagegen $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, so findet man

$$(17) \qquad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp \sin px \int_0^\infty \varphi(\alpha) \sin p\alpha \, d\alpha \, ;$$

und umgekehrt, wenn man die Formeln (16) oder (17) anwendet, so bildet sich das zweite Glied aus den Werthen von $\varphi(x)$, welche sich auf die positiven x beziehen; und wie auch die Werthe von $\varphi(-x)$ nach der Natur der Function φ seien, so geben diese Formeln für ein negatives x, die erste $\varphi(x)$, und die zweite $-\varphi(x)$.

Alle diese Formeln, welche dazu dienen, vollkommen willkürliche, zwischen endlichen oder unendlichen Grenzen der Variable gegebene Functionen darzustellen, sind von dem grössten Nutzen in den Anwendungen der Analysis auf Aufgaben der Physik oder molecularen Mechanik.

Wenn man in analoger Weise eine Function von zwei Variablen x und y ausdrücken sollte, so würde man sie zuerst als Function von x mit der Constante y betrachten, und von den obigen Formeln Gebrauch machen. Die Function $\varphi(\alpha)$ würde dann y enthalten und könnte folglich durch dieselben Formeln ausgedrückt werden, was die Anzahl der Integrations- und Summenzeichen verdoppeln würde; und ebenso würde man für irgend eine Anzahl von Variablen verfahren.

Verschiedene Beispiele.

134. Nehmen wir uns zuerst vor in eine trigonometrische Reihe eine Function zu entwickeln, welche gleich ist einer Constante zwischen $x = 0$, $x = l$, und gleich derselben Constante mit geändertem Zeichen zwischen $x = 0$, $x = -l$. Offenbar genügt es, diese Constante gleich der Einheit zu nehmen, und man wird nachher auf jeden anderen Werth durch einfache Multiplication übergehen.

Wir setzen also $\varphi(x) = 1$ in der Formel (11), und erhalten

$$1 = \frac{2}{l} \sum \sin \frac{m\pi x}{l} \int_0^l \sin m \frac{\pi \alpha}{l}\, d\alpha = \frac{2}{\pi} \sum \frac{1 - \cos m\pi}{m} \sin m \frac{\pi x}{l}.$$

Für m gerade ist nun $1 - \cos m\pi = 0$, und für m ungerade $1 - \cos m\pi = 2$; woraus folgt

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin 5 \frac{\pi x}{l} + \cdots \right);$$

was die verlangte Formel ist. Die unbegrenzte Function ist periodisch, und die Amplitude der Periode $2l$.

135. Entwickeln wir jetzt eine Reihe, welche gleich x ist zwischen den Grenzen $-l$ und $+l$.

Da man jetzt hat $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, so muss man wieder von der Formel (11) Gebrauch machen, und man findet

$$(a) \qquad x = \frac{2}{l} \sum_1^\infty \sin m \frac{\pi x}{l} \int_0^l \alpha \sin m \frac{\pi \alpha}{l}\, d\alpha,$$

oder, die Integration ausführend,

$$x = \frac{2l}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{4} \sin 4 \frac{\pi x}{l} + \cdots \right).$$

Aber wenn man wollte, dass die Function gleich x wäre, zwischen 0 und l, und gleich $-x$ zwischen 0 und $-l$, so würde man haben $\varphi(-x) = \varphi(x)$, und müsste die Formel (9) anwenden. Man erhält dann

$$x = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha\, d\alpha + \frac{2}{l} \sum_1^\infty \cos m \frac{\pi x}{l} \int_0^l \alpha \cos m \frac{\pi \alpha}{l}\, d\alpha,$$

oder, die Integrationen ausführend,

$$(b) \quad x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos 3 \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos 5 \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{7^2} \cos 7 \frac{\pi x}{l} + \cdots \right).$$

Diese beiden Formeln (a) und (b) stellen denselben Werth x dar zwischen 0 und l, aber sie haben gleiche Werthe und verschiedene Zeichen zwischen 0 und $-l$; sie haben überdies beide $2l$ zur Periode.

Man sieht hieraus, dass die Oerter, deren Ordinaten diese Entwicklungen sind, Theile von endlicher Länge haben, welche zusammenfallen, und andere Theile, welche verschieden sind für beide.

136. Suchen wir jetzt den Reihenausdruck für die Ordinate des gleichschenkligen Trapezes $AMNB$, dessen Basis

AB gleich π ist, und welches so ist, dass man von A bis zur Abscisse $AP = \alpha$, $y = x$ hat; von P bis Q, $y = \alpha$, und von Q bis B, $y = \pi - x$. Setzen wir ferner voraus, dass man $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ habe zwischen $-\pi$ und $+\pi$.

Man muss in diesem Falle von der Formel (12) Gebrauch machen, und man findet, nachdem jede Reduction gemacht ist, als Ausdruck der Ordinate dieses Umfangs

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin\alpha\sin x + \frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5x + \cdots\right).$$

Wenn man $\alpha = \frac{\pi}{2}$ voraussetzt, so reducirt sich das Trapez auf ein gleichschenkliges Dreieck, und die Ordinate dieser gebrochenen Linie ist

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \frac{1}{7^2}\sin 7x + \cdots\right).$$

137. Betrachten wir nun Functionen, welche gegeben sind von $x = -\infty$ bis zu $x = \infty$.

Nehmen wir an, dass man haben soll $y = e^{-x}$ von $x = 0$ bis $x = \infty$, und $y = e^{x}$ von $x = 0$ bis $x = -\infty$; man hat dann die Bedingung $\varphi(-x) = \varphi(x)$, und muss von der Formel (16) Gebrauch machen. Sie giebt

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dp\cos px\int_0^\infty e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha.$$

Aber

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\cos p\alpha\, d\alpha = \frac{1}{1+p^2};$$

man hat also

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos px\, dx}{1+p^2}.$$

Und in der That, wir haben gesehen in Nr. 103, dass dieser Ausdruck äquivalent ist mit e^{-x} wenn x positiv, und mit e^{x} wenn x negativ.

138. Beschliessen wir diese Beispiele mit dem Falle einer Function, welche der Einheit gleich ist für alle Werthe von x zwischen -1 und $+1$, und Null für jeden anderen Werth von x.

Mam hat in diesem Falle $\varphi(-x) = \varphi(x)$, und gebraucht also die Formel (16).

Da nun die Function Null ist von $x = 1$ bis $x = \infty$, so giebt die Integration Null in dieser ganzen Ausdehnung, und folglich braucht man sie nur zwischen den Grenzen 0 und 1 zu betrachten; welches liefert

$$y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dp \cos px \int_0^1 \cos p\alpha \, d\alpha;$$

und da man hat

$$\int_0^1 \cos p\alpha \, d\alpha = \frac{\sin p}{p},$$

so schliesst man hieraus

$$y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p \cos px}{p} dp;$$

und man hat somit einen Ausdruck, welcher gleich 1 ist für jeden Werth von x zwischen -1 und $+1$, und gleich Null für jeden Werth von x ausserhalb dieser Grenzen. Es ist übrigens leicht, dies zu verificiren. In der That, man hat

$$\int_0^\infty \frac{\sin p \cos px}{p} dp = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(x+1)p}{p} dp - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(x-1)p}{p} dp.$$

Wenn nun $x > 1$, so sind die in das zweite Glied eingehenden Integrale gleich $\frac{\pi}{2}$, und die beiden Ausdrücke zerstören sich. Ebenso, wenn $x < -1$; was zunächst beweist, dass unser Integral Null ist für jeden Werth von x ausserhalb der Grenzen -1 und $+1$.

Wenn jetzt x zwischen -1 und $+1$ liegt, so addiren sich die beiden Theile und geben zur Summe $\frac{\pi}{2}$, woraus $y = 1$ folgt; was zu verificiren war.

Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen.

---

139. Wir haben gesehen, wie man eine Function mehrerer unabhängigen Variablen bestimmen kann, wenn man ihre partiellen Ableitungen der ersten Ordnung in Bezug auf jede Variable, ausgedrückt in diese Variablen und in die Function selbst, kennt. Wir wollen jetzt annehmen, dass man nur eine Gleichung giebt, worin ihre partiellen Ableitungen von beliebiger Ordnung vorkommen.

Betrachten wir eine Gleichung, welche in irgend einer Weise die beiden unabhängigen Variablen x, y, die Function z und alle ihre partiellen Ableitungen, welche nicht die Ordnung m übersteigen, enthält; sie kann dargestellt werden unter der Form

$$(1)\quad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dx^m}, \frac{dz}{dy}, \frac{d\frac{dz}{dx}}{dy}, \ldots, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dy^m}\right) = 0.$$

Indem man z als Function von x betrachtet, kann man z entwickeln nach der Formel von Taylor oder Maclaurin, welche letztere wir als die einfachere anwenden werden.

Die Gleichung (1) giebt den Werth von $\frac{d^mz}{dx^m}$ als Function von x, y, z und den anderen Ableitungen, in welchen höchstens $m-1$ Differentiationen in Bezug auf x vorkommen. Indem

man den Werth von $\frac{d^m z}{dx_m}$ nach x differentiirt, erhält man $\frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}}$, dessen Ausdruck $\frac{d^m z}{dx^m}$, sowie die Ableitung davon in Bezug auf y enthalten wird. Aber wenn man statt $\frac{d^m z}{dx^m}$ seinen aus (1) gezogenen Werth setzt, so hat man keine Ableitung mehr, welche die Ordnung $m-1$ in Bezug auf x übersteigt. Indem man so unbegrenzt fortfährt, erhält man alle partiellen Ableitungen in Bezug auf x, von der $m$ten an bis ins Unendliche, ausgedrückt durch $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \cdots, \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}$ und ihre Ableitungen in Bezug auf y allein.

Es handelt sich jetzt darum die Werthe von allen Ableitungen nach x zu erhalten, wenn man darin $x = 0$ macht, wodurch sie Functionen von y allein werden. Hierzu wird man bemerken, dass indem man $x = 0$ macht in einer Function von x und y und in Bezug auf y differentiirt, man dasselbe Resultat hat, wie wenn man zuvor differentiirt und dann $x = 0$ macht; also ist $\frac{d^{p+q} z}{dx^p \, dy^q}$, worin man $x = 0$ macht, identisch mit $\frac{d^q \left(\frac{d^p z}{dx^p}\right)_0}{dy^q}$, indem man durch $\left(\frac{d^p z}{dx^p}\right)_0$ bezeichnet was aus $\frac{d^p z}{dx^p}$ wird, wenn man darin $x = 0$ macht. Hieraus folgt, dass alle Derivirten von z in Bezug auf x, in welchen man $x = 0$ macht, sich aus z und den $m-1$ ersten ableiten, und aus den Derivirten, welche diese m Functionen von y allein, in Bezug auf y geben. Ueberdies lässt die vorgelegte Gleichung diese m Functionen willkürlich und bestimmt nur die folgenden. Man kann daher die Entwicklung von z in Bezug auf x so ausführen:

$$z = Y + Y_1 x + Y_2 \frac{x^2}{1.2} + \cdots + Y_{m-1} \frac{x^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} + \cdots,$$

worin $Y, Y_1, \ldots, Y_{m-1}$ vollkommen willkürliche Functionen von y sind. Und man kann a posteriori beweisen, wie in dem Falle der gewöhnlichen Differentialgleichungen, dass diese

Entwicklung identisch denselben Werth für $\frac{d^m z}{dx^m}$ giebt wie die Gleichung (1).

140. Wenn man statt zweier unabhängigen Variablen irgend eine Anzahl n derselben hätte, so könnte man sich immer die Function nach den Potenzen von x entwickelt denken; der Unterschied würde nur darin bestehen, dass Y, Y_1, ..., Y_{m-1} willkürliche Functionen aller unabhängigen Variablen, mit Ausnahme von x, bezeichnen würden.

141. Umgekehrt ist man versichert, das allgemeine Integral einer Gleichung wie die betrachtete zu haben, wenn die Function und ihre $m-1$ ersten Ableitungen in Bezug auf x, indem man $x=0$ macht, gleichgesetzt werden können vollkommen willkürlichen Functionen aller unabhängigen Variablen, mit Ausnahme von x; denn, weil das gegebene Integral der vorgelegten Gleichung genügt, so leiten sich alle Glieder seiner Entwicklung, vom $m$ten an, aus den m ersten ab, in derselben Weise wie bei der Entwicklung des allgemeinen Integrals. Nun sind diese m ersten identisch in beiden Entwicklungen; also sind es alle andern, und die gegebene Function unterscheidet sich nicht von dem allgemeinen Integral.

142. Wir haben die Gleichung der $m$ten Ordnung vollständig vorausgesetzt; aber offenbar genügt es zur Aufrechthaltung unserer Schlüsse, dass indem man sie in Bezug auf den höchsten Differentialcoëfficienten der Function, der in Bezug auf eine Variable allein genommen ist, auflöst, dass in seinen Ausdruck keine Grösse eingeht, worin eine ebenso grosse Anzahl von Differentiationen in Bezug auf dieselbe Variable vorkommt. In dem besonderen Falle, wo dieser Umstand sich bezüglich keiner der Variablen darbieten würde, könnte die Entwicklung nicht mehr in derselben Weise geschehen, und wir würden uns von dem Zwecke dieses Buchs entfernen, wollten wir uns damit in einer allgemeinen Weise beschäftigen.

143. Wenn die höchsten Differentialcoëfficienten in Bezug auf x und y nicht von derselben Ordnung sind, so wird die Entwicklung nicht dieselbe Anzahl von willkürlichen Functionen enthalten, wenn man sie successive nach x und y ordnet; aber

diese Functionen enthalten nicht dieselben Variablen, und alle diese Entwicklungen sind im Grunde identisch, weil sie alle die allgemeinste Function darstellen, welche der nämlichen Gleichung genügt.

144. Wenn nur Ableitungen vorkommen, welche in Bezug auf eine der Variablen genommen sind, so wird man alle anderen als Constanten betrachten, und man hat dann eine Differentialgleichung mit zwei Variablen zu integriren. Die durch diese Integration eingeführten Constanten werden als willkürliche Functionen derjenigen Variablen betrachtet, welche man als constant betrachtet hatte.

Es sei z. B.

$$\frac{d^m z}{dx^m} = F(x, y),$$

so hat man

$$z = Y + Y_1 x + \cdots + Y_{m-1} x^{m-1} + \varphi(x, y),$$

wo $\varphi(x, y)$ diejenige Function ist, welche man erhält, indem man $F(x, y)$ $m$mal in Bezug auf x integrirt, und $Y, \ldots, Y_{m-1}$ willkürliche Functionen von y sind.

145. Betrachten wir jetzt die Gleichung

$$\frac{d^{m+n} z}{dx^m dy^n} = F(x, y),$$

welche in dem Falle enthalten ist, wo wir gesagt haben, dass man die Entwicklung nach den Potenzen einer der Variablen nicht ausführen könne.

Wenn man $\frac{d^n z}{dy^n} = u$ setzt, so hat man

$$\frac{d^m u}{dx^m} = F(x, y),$$

woraus

$$u = Y + Y_1 x + \cdots + Y_{m-1} x^{m-1} + \int^m F(x, y)\, dx^m = \frac{d^n z}{dy^n}.$$

Indem man jetzt $n$mal in Bezug auf y integrirt, und berücksichtigt, dass man bei jeder totalen Integration eine einzige willkürliche Function von x hinzufügen muss, und dass die Integrale von $Y, \ldots, Y_{m-1}$ neue willkürliche Functionen $Y', \ldots, Y^{(m)}$ von y sein werden, so hat man

$$z = \int^n dy^n \int^m dx^m F(x, y) + Y' + Y'' x + \cdots + Y^{(m)} x^{m-1}$$
$$+ X + X_1 y + \cdots + X_{n-1} y^{n-1}.$$

Wie man sieht, enthält diese Entwicklung willkürliche Functionen von jeder der Variablen einzeln.

146. Wenden wir die Formel von Maclaurin an zur Integration der sehr einfachen Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = a \frac{dz}{dy}.$$

Man zieht daraus, nach x differentiirend,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a \frac{d^2 z}{dx dy} = a \frac{d \cdot \frac{dz}{dx}}{dy} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2},$$
$$\frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \frac{d^3 z}{dy^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^m z}{dx^m} = a^m \frac{d^m z}{dy^m};$$

folglich

$$z = z_0 + \frac{dz_0}{dy} ax + \frac{d^2 z_0}{dy^2} \cdot \frac{a^2 x^2}{1.2} + \cdots + \frac{d^m z_0}{dy^m} \cdot \frac{a^m x^m}{1 \cdot 2 \cdots m} + \cdots$$

Nun stellt das zweite Glied die Entwicklung der durch z_0 repräsentirten Function von y dar, in welcher man y in $y + ax$ verwandelt. Da überdies z_0 eine willkürliche Function $F(y)$ ist, so hat man als das gesuchte Integral

$$z = F(y + ax).$$

Man findet somit eine willkürliche Function, welche zwei Variablen, aber in einer bestimmten Weise enthält; sie ist also keine willkürliche Function in Bezug auf die beiden Variablen.

Lineare Gleichungen mit partiellen Differentialen.

147. Wenn die lineare Gleichung kein von z und seinen Ableitungen unabhängiges Glied enthält, so ist leicht zu sehen, dass die Summe einer beliebigen Anzahl particulärer Integrale auch derselben Gleichung genügt.

Wenn überdies die Coëfficienten constant sind, so genügt man ihr durch Ausdrücke, welche analog sind den für die Differentialgleichungen gefundenen.

Betrachtet man z. B. eine Gleichung der $m$ten Ordnung, welche die Function z und ihre Ableitungen in Bezug auf x und y, mit Constanten multiplicirt, enthält, so kann man $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$ setzen; die Exponentialgrösse, sowie C verschwindet durch die Substitution in der gegebenen Gleichung, und es bleibt eine Gleichung des $m$ten Grades zwischen α und β. Diese kann m Werthe für β als Function von α liefern; bezeichnet man einen derselben durch $\varphi(\alpha)$, so hat man eine Auflösung der Gleichung, indem man setzt

$$z = \Sigma Ce^{\alpha x + y\varphi(\alpha)}.$$

Die Grössen α und C kann man in irgend einer Weise ändern beim Uebergang von einem Gliede dieser Summe zum anderen, und die Zahl der Glieder ist vollkommen willkürlich; wenn sie unendlich, und C endlich ist, so hat man eine Reihe; aber wenn C unendlich klein und von der Form $F(\alpha)d\alpha$ ist, wo F eine willkürliche Function bezeichnet, so hat man ein in Bezug auf α genommenes Integral. Der Werth von z ist dann $z = \int F(\alpha) e^{\alpha x + y\varphi(\alpha)} d\alpha$, und enthält eine willkürliche Function.

148. Wenn die Werthe von β alle linear sind in Bezug auf α, d. h. wenn man hat $\beta = a\alpha + b$, so ist es leicht, das allgemeine Integral der Gleichung unter endlicher Form auszudrücken.

In der That, einer der Werthe von β wird die Reihe geben

$$z = \Sigma Ce^{by} e^{\alpha(x + ay)} = e^{by} \Sigma Ce^{\alpha(x + ay)}.$$

Aber wenn C und α willkürlich sind, so stellt ΣCu^{α} jede Function von u dar; daher stellt $\Sigma Ce^{\alpha(x + ay)}$ eine willkürliche Function von $e^{x + ay}$ und folglich von $x + ay$ dar. Bezeichnet man sie durch $F(x + ay)$, und macht man dasselbe Raisonnement für die m Werthe von β, so hat man, diese m Auflösungen addirend,

$$z = e^{by} F(x + ay) + e^{b_1 y} F_1(x + a_1 y) + \dots + e^{b_{m-1} y} F_{m-1}(x + a_{m-1} y).$$

Dieser Ausdruck enthält m willkürliche Functionen, so dass wenn man nach den Potenzen von x entwickeln würde,

die m ersten Coëfficienten willkürlichen Functionen von y gleich gesetzt werden könnten. Er repräsentirt mithin das allgemeine Integral.

149. Wenden wir diese Methode an auf die Gleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

welche die schwingenden Bewegungen, sowohl der elastischen Saiten als der Luft in cylindrischen Röhren, bestimmt.

Man setzt $z = Ce^{\alpha x + \beta y}$, und erhält

$$\alpha^2 - a^2\beta^2 = 0, \quad \text{woraus} \quad \alpha = \pm a\beta;$$

folglich

$$z = \Sigma Ce^{\beta(y + ax)} \quad \text{und} \quad z = \Sigma C_1 e^{\beta(y - ax)}.$$

Das allgemeine Integral ist also

$$z = F(y + ax) + F_1(y - ax).$$

Die Functionen F, F_1 werden sich leicht bestimmen, wenn man z, $\frac{dz}{dx}$ für $x = 0$ kennt.

In der That, es sei

$$z_0 = f(y), \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = \varphi(y),$$

so müssen die Functionen F und F_1 den beiden Bedingungen genügen

$$F(y) + F_1(y) = f(y), \quad F'(y) - F'_1(y) = \frac{1}{a}\,\varphi(y).$$

Integriren wir die letzte und bezeichnen $\int_{y_0}^{y} \varphi(y)dy$ durch $\psi(y)$, so erhalten wir

$$F(y) - F_1(y) = \frac{1}{a}\,\psi(y) + C,$$

wo C eine willkürliche Constante. Man zieht aus diesen Gleichungen

$$2F(y) = f(y) + \frac{1}{a}\,\psi(y) + C,$$

$$2F_1(y) = f(y) - \frac{1}{a}\,\psi(y) - C;$$

der allgemeine Werth von z, welcher allen Bedingungen genügt, ist daher

$$z = \frac{f(y + ax) + f(y - ax)}{2} + \frac{\psi(y + ax) - \psi(y - ax)}{2a}.$$

Integration der linearen Partialgleichungen durch bestimmte Integrale.

150. Wir haben oben gesagt, wie man, von particulären Integralen ausgehend, allgemeinere erhalten kann, welche willkürliche Functionen enthalten und ausgedrückt werden durch Integrale, die genommen sind in Bezug auf andere Variablen als die in der vorgelegten Gleichung vorkommenden. Die Wahl, welche man für die Form der particulären Integrale zu treffen hat, muss so geschehen, dass die willkürlichen Functionen, welche man einführt, sich leicht vermöge der Gegebenen bestimmen lassen; und diese Gegebenen sind gewöhnlich die Werthe, welche die Hauptvariable und einige ihrer Ableitungen nach einer der unabhängigen Variablen annehmen, wenn man dieser letzten einen besonderen Werth beilegt. Betrachten wir als erstes Beispiel die Gleichung

(1) $$\frac{dz}{dx} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2},$$

welche die Bewegung der Wärme in einer prismatischen Stange bestimmt, deren laterale Oberfläche für sie undurchdringbar ist.

Die Aufgabe wird vollkommen bestimmt sein nach Dem, was wir gesehen haben, wenn man den auf $x = 0$ bezüglichen Werth von z kennt. Es sei also gegeben

(2) $$z = F(y) \text{ für } x = 0;$$

man genügt der Gleichung (1), indem man nimmt

$$z = e^{nx} \cos my,$$

wofern $n = -a^2 m^2$. Man kann selbst statt y, $y - \alpha$ setzen, und mit einer willkürlichen Constante A multipliciren, was den particulären Werth liefert

$$z = A e^{-a^2 m^2 x} \cos m(y - \alpha).$$

Lassen wir die willkürlichen Constanten m und α um unendlich kleine Incremente dm, $d\alpha$ wachsen, und geben wir dem A die Form

$$f(\alpha)\, d\alpha\, dm,$$

wo f eine willkürliche Function bezeichnet; die Summe einer beliebigen Anzahl dieser unendlich kleinen Auflösungen wird auch eine Auflösung sein. Man hat also einen allgemeineren Werth von z, indem man nimmt

$$z = \int\int f(\alpha) e^{-a^2m^2x} \cos m(y-\alpha)\, dm\, d\alpha,$$

wo die Grenzen der beiden Integrale willkürlich sind.

Nun reducirt sich dieser Werth von z für $x = 0$ auf

$$\int\int f(\alpha) \cos m(y-\alpha)\, dm\, d\alpha.$$

Wenn man daher zu Grenzen dieser Integrale $-\infty$ und $+\infty$ nimmt, so findet man zum Resultat $2\pi f(y)$; was $f(y)$ bestimmt, weil man nach der gegebenen Bedingung haben soll

$$2\pi f(y) = F(y).$$

Der Werth von z, welcher der Gleichung (1) und der Bedingung (2) genügt, wird demnach sein

$$(3) \qquad z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-a^2m^2x} \cos m(y-\alpha)\, dm\, d\alpha,$$

und jeder Werth von z, welcher diesen beiden Gleichungen genügte, wäre identisch mit diesem, unter welcher Form er sich auch darböte. Es bleibt nur zu untersuchen, ob man den Ausdruck vereinfachen kann.

Man hat die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2u^2} \cos 2pu\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{n} e^{-\frac{p^2}{n^2}};$$

woraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2m^2x} \cos m(y-\alpha)\, dm = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{x}} e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{4a^2x}},$$

und somit

$$z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y-\alpha}{2a\sqrt{x}}\right)^2} F(\alpha)\, d\alpha,$$

welcher Ausdruck nur ein einfaches bestimmtes Integral enthält.

Man kann ihm eine bequemere Form geben, indem man setzt

$$\left(\frac{y-\alpha}{2a\sqrt{x}}\right)^2 = \beta^2, \text{ woraus } \alpha = y \pm 2a\beta\sqrt{x}$$

und

$$d\alpha = \pm\, 2a\sqrt{x}\, d\beta.$$

Nimmt man die oberen Zeichen, so werden die Grenzen von β dieselben sein wie die von α, und man hat

(4) $$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} F(y + 2a\beta\sqrt{x})\, d\beta.$$

Nimmt man die untern Zeichen, so vertauschen sich die Grenzen, und indem man sie wieder in dieselbe Ordnung bringt, findet man den Werth von z

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} F(y - 2a\beta\sqrt{x})\, d\beta,$$

welcher sich von dem vorigen nicht unterscheidet, da β durch alle positiven und negativen Werthe geht, und $e^{-\beta^2}$ sich nicht ändert, wenn β sein Zeichen wechselt.

Die allgemeine Lösung der Aufgabe wird also durch die Gleichung (4) gegeben.

151. Es sei jetzt

(1) $$\frac{dz}{dx} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + bz,$$

und z sei der Bedingung unterworfen

(2) $$z = F(y) \text{ für } x = 0.$$

Wenn man $z = e^{bx} u$ setzt, so giebt die Gleichung (1)

$$\frac{du}{dx} = a^2 \frac{d^2 u}{dy^2},$$

und die Bedingung (2) führt zu der folgenden:

$$u = F(y) \text{ für } x = 0.$$

Die Bestimmung von u zieht sich also auf den vorigen Fall zurück, und z wird daraus folgen.

152. Integriren wir jetzt die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{1}$$

welche wir schon durch eine andere Methode behandelt haben, und welche sich auf das Problem der schwingenden Saiten bezieht. Fügen wir derselben die beiden Bedingungen hinzu, um die willkürlichen Functionen zu bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} &(2) \qquad y = F(x) \\ &(3) \qquad \frac{dy}{dt} = f(x) \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0.$$

Man genügt der Gleichung (1), indem man nimmt

$$y = A \cos amt \cos m(x - \alpha),$$

wo A, m, α willkürliche Constanten. Man wird eine allgemeinere Auflösung haben, indem man $A = \varphi(\alpha)\, dm\, d\alpha$ nimmt, und in Bezug auf α und m zwischen $-\infty$ und $+\infty$ integrirt, während $\varphi(\alpha)$ eine willkürliche Function bezeichnet. Man erhält auf diese Weise

$$y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos amt \cos m(x - \alpha)\, dm\, d\alpha.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich auf $2\pi\varphi(x)$ für $t = 0$. Daher findet man, wenn man $\varphi(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{2\pi}$ nimmt, $F(x)$ für $t = 0$; woraus man sieht, dass der Ausdruck

$$y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos amt \cos m(x - \alpha)\, dm\, d\alpha \tag{4}$$

den Gleichungen (1) und (2) genügt; aber er liefert $\frac{dy}{dt} = 0$ für $t = 0$, und genügt folglich nicht der Bedingung (3). Es bleibt daher übrig, einen Werth von y zu finden, welcher den Gleichungen (1), (3) genügt und Null wird für $t = 0$; indem man ihn zu demjenigen addirt, welchen die Gleichung (4)

giebt, wird man einen Werth von y haben, der allen Bedingungen genügt.

Man bemerkt zunächst, dass wenn eine Function y der Gleichung (1) genügt, die Functionen $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ etc. ihr gleichfalls genügen werden, sowie auch $\int\limits_0^t y\,dt$, letzteres wenn $\frac{dy}{dt}$ Null ist für $t = 0$.

Wenn man daher den Ausdruck (4) in Bezug auf t von Null an integrirt, und darin die Function $F(\alpha)$ durch $f(\alpha)$ ersetzt, so hat man eine Auflösung der Gleichung (1), welche, nach t differentiirt, sich auf $f(x)$ für $t = 0$ reducirt, selbst aber Null wird für $t = 0$. Man erhält auf diese Weise den Ausdruck

$$y = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\frac{\sin a m t}{m}\cos m(x-\alpha)\,dm\,d\alpha,$$

den man übrigens leicht verificiren kann. Der Werth von y, welcher den Gleichungen (1), (2), (3) genügt, und der einzige ist, der dies thut, ist also

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos a m t \cos m(x-\alpha)\,dm\,d\alpha \\ & + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\frac{\sin a m t}{m}\cos m(x-\alpha)\,dm\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Untersuchen wir jetzt, ob diese Doppelintegrale sich reduciren lassen, und betrachten wir zunächst das erste.

Man kann $\cos a m t \cos m(x-\alpha)$ ersetzen durch

$$\frac{\cos m(x+at-\alpha) + \cos m(x-at-\alpha)}{2},$$

und der Theil, welchen wir betrachten von dem zweiten Gliede der Gleichung (5), wird

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)[\cos m(x+at-\alpha) + \cos m(x-at-\alpha)]\,dm\,d\alpha,$$

oder

$$\frac{F(x+at) + F(x-at)}{2}.$$

Gehen wir zu dem zweiten Theile über, und ersetzen darin

$$\sin amt \cos m(x-\alpha)$$

durch

$$\frac{\sin m(x+at-\alpha)-\sin m(x-at-\alpha)}{2};$$

er wird dann

$$(6)\quad \frac{1}{4\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\left[\frac{\sin m(x+at-\alpha)}{m}-\frac{\sin m(x-at-\alpha)}{m}\right]dm\,d\alpha.$$

Man weiss aber, dass welchen Werth auch p habe, das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin pm}{m}\,dm$$

gleich π ist, wenn p positiv, und gleich $-\pi$ wenn p negativ.

Daher wird der Ausdruck (6) allemal Null sein, wenn $x+at-\alpha$ und $x-at-\alpha$ dasselbe Zeichen haben; und folglich genügt es die Werthe von α zu betrachten, welche diesen beiden Grössen verschiedene Zeichen geben. Diese Werthe werden durch die Ungleichheiten bestimmt

$$x+at-\alpha>0,\quad x-at-\alpha<0,$$

wenn t positiv; und durch

$$x+at-\alpha<0,\quad x-at-\alpha>0,$$

wenn t negativ ist. Die ersten geben

$$\alpha>x-at,\quad \alpha<x+at;$$

die letzten geben

$$\alpha>x+at,\quad \alpha<x-at.$$

Es genügt daher, die Integration in Bezug auf α zwischen den Grenzen $x-at$, $x+at$ zu machen.

Wenn $t>0$, so ist $x+at-\alpha$ positiv, und man hat

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin m(x+at-\alpha)}{m}\,dm=\pi;$$

der Ausdruck (6) reducirt sich dann auf

$$(7)\quad \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f(\alpha)\,d\alpha.$$

Wenn $t < 0$, so ist $x + at - \alpha$ negativ; man hat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\,(x + at - \alpha)}{m}\, dm = -\pi,$$

und der Ausdruck (6) wird

$$\frac{-1}{2a} \int_{x+at}^{x-at} f(\alpha)\, d\alpha,$$

was mit (7) übereinstimmt.

Bezeichnen wir $\int f(x)\,dx$ durch $\psi(x)$, so wird der Ausdruck (7)

$$\frac{\psi(x + at) - \psi(x - at)}{2a}$$

und die Formel (5) reducirt sich auf die folgende:

$$y = \frac{F(x + at) + F(x - at)}{2} + \frac{\psi(x + at) - \psi(x - at)}{2a}.$$

Sie stimmt jetzt überein mit derjenigen, welche wir vorher durch ein einfacheres Verfahren gefunden hatten. Aber wir haben geglaubt, dass es gut sein könnte, sie auf diesem neuen Wege zu erhalten, nicht nur um eine Anwendung von der Methode der bestimmten Integrale zu machen, sondern weil die von uns ausgeführte Reduction der Doppelintegrale Besonderheiten darbietet, denen man in anderen weniger einfachen Umständen begegnet, wo sie Diejenigen aufhalten könnten, welche noch nicht an diese Art der Analysis gewöhnt sind.

153. Es sei noch die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0, \tag{1}$$

welche die schwingende Bewegung einer elastischen Platte darstellt.

Fügen wir die beiden Bedingungen hinzu

$$\left.\begin{array}{ll} (2) & y = F(x) \\ (3) & \dfrac{dy}{dt} = f(x) \end{array}\right\} \text{für } t = 0,$$

so ist die Aufgabe vollkommen bestimmt und nur eine Auflösung möglich.

Man wird zunächst versuchen der Gleichung (1) zu genügen durch einen einfachen Werth von der Form

$$y = \cos mt \cos n(x - \alpha),$$

und man findet, dass es hierzu genügt, wenn man hat

$$m = n^2;$$

man hat auf diese Weise den besonderen Werth

$$y = A \cos n^2 t \cos n(x - \alpha),$$

wo A, n, α willkürliche Constanten.

Nehmen wir wieder $A = \varphi(\alpha)\, d\alpha\, dn$, und integriren in Bezug auf n und α zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so erhalten wir eine allgemeinere Auflösung der Gleichung (1), welche ausgedrückt wird durch die Formel

$$y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \cos n^2 t \cos n(x - \alpha)\, dn\, d\alpha.$$

Wenn man darin $t = 0$ macht, so reducirt sie sich auf $2\pi\varphi(x)$; und folglich wird man der Bedingung (2) genügen, indem man nimmt

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{2\pi}.$$

Somit genügt der Ausdruck

$$(4) \qquad y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \cos n^2 t \cos n(x - \alpha)\, dn\, d\alpha$$

den Gleichungen (1), (2), und ergiebt $\frac{dy}{dt} = 0$ für $t = 0$. Man braucht also nur einen neuen Werth von y zu finden, welcher den Gleichungen (1), (3) genügt, und sich auf Null reducirt für $t = 0$; indem man ihn zu demjenigen addirt, welchen die Gleichung (4) giebt, hat man die gesuchte Auflösung. Wenn man aber in Bezug auf t zwischen den Grenzen 0 und t einen Werth von y integrirt, welcher der Gleichung (1) genügt, und so ist dass $\frac{dy}{dt} = 0$ für $t = 0$, so wird das Resultat ihr auch genügen. Wenn man daher den Ausdruck (4) in Bezug auf t integrirt und F durch f ersetzt, so erhält man eine Auflösung der Gleichung (1), welche, nach t differentiirt, $f(x)$ wird für $t = 0$, und folglich der Bedingung (3) genügt. Ueberdies wird dieser Werth von y Null für $t = 0$, weil das Integral von $t = 0$ an genommen wird; indem man ihn also zu demjenigen addirt, welchen die Gleichung (4) giebt, hat

man die Lösung der vorgelegten Aufgabe. Man erhält auf diese Weise

$$(5)\quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\cos n^2 t \cos n(x-\alpha)\,dn\,d\alpha \\ \quad + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\,\dfrac{\sin n^2 t}{n^2}\cos n(x-\alpha)\,dn\,d\alpha . \end{cases}$$

Der erste Theil dieser Auflösung kann auf eine einfachere Form gebracht werden, indem man die Integration in Bezug auf n ausführt.

In der That, wir haben die Formel kennen gelernt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(z^2)\cos 2\beta z\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[\cos(\beta^2) + \sin(\beta^2)];$$

indem man setzt $z = n\sqrt{t}$, $\beta = \dfrac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}$, erhält man hieraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos n^2 t \cos n(x-\alpha)\,dn$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\left[\cos\left(\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2\right) + \sin\left(\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2\right)\right].$$

Der erste Theil des Werthes von y, welcher die vollständige Lösung der Aufgabe allemal dann giebt, wenn man haben soll $\dfrac{dy}{dt} = 0$ für $t = 0$, nimmt auf diese Weise die Form an

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\left[\cos\left(\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2\right) + \sin\left(\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2\right)\right] d\alpha,$$

oder, indem man $\dfrac{\alpha - x}{2\sqrt{t}} = \beta$ setzt, woraus $d\alpha = 2\,d\beta\sqrt{t}$,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\beta^2) + \sin(\beta^2)]\,F(x + 2\beta\sqrt{t})\,d\beta .$$

154. Wir wollen noch das Integral einer Gleichung kennen lernen, welche sich häufig in den Problemen der mathematischen Physik darbietet. Aber vorher ist es nothwendig, eine Hülfsaufgabe zu lösen, welche darin besteht, den Ausdruck

$$(a) \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(l\cos\theta + m\sin\theta\cos\psi + n\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

auf ein einfaches Integral zurückzuführen, wenn F eine vollkommen willkürliche Function bezeichnet, l, m, n beliebige von θ und ψ unabhängige Grössen sind, und die Grenzen 0, π sich auf den Winkel θ, die Grenzen 0, 2π aber auf den Winkel ψ beziehen; so dass diese beiden Winkel, als Polarcoordinaten in Bezug auf rechtwinklige Axen betrachtet, successive alle Richtungen um den Ursprung herum bestimmen würden. Dies vorausgesetzt, sei

$$l = k\cos\theta', \quad m = k\sin\theta'\cos\psi', \quad n = k\sin\theta'\sin\psi',$$

daher

$$k = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2},$$

so wird das Integral zu

$$(b) \qquad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(k\cos p)\sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

wo p den Winkel bezeichnet, welchen die beiden durch die Winkel θ, ψ und θ', ψ' bestimmten Richtungen mit einander bilden. Nun ist $\sin\theta\, d\theta\, d\psi$ das Element der aus dem Ursprung als Mittelpunkt mit der Einheit als Radius beschriebenen Kugelfläche; und nach den Grenzen der Integrale muss man successive alle Elemente betrachten, welche diese Fläche zusammensetzen, und sie mit der Function $F(k\cos p)$ multipliciren, welche von dem Winkel abhängt, den die Strahlen nach diesen verschiedenen Elementen mit der festen Richtung machen, welche den Winkeln θ', ψ' entspricht, die durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$\cos\theta' = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\sin\theta'\cos\psi' = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\sin\theta'\sin\psi' = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Es ist also sehr evident, dass das vorgelegte Integral nicht abhängt von der besonderen Richtung der Axen; und, um die

Rechnung zu vereinfachen, wählen wir zur Axe der x die feste Gerade, von welcher eben die Rede war. Wir haben dann $p = \theta$, und der Ausdruck (b) wird

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(k\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Indem man in Bezug auf ψ integrirt, erhält man

$$2\pi \int_0^{\pi} F(k\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

welcher Ausdruck wird, indem man $\cos\theta = \mu$ macht,

$$2\pi \int_{-1}^{+1} F(k\mu)\, d\mu \quad \text{oder} \quad 2\pi \int_{-1}^{+1} F(\mu\sqrt{l^2+m^2+n^2})\, d\mu,$$

so dass man hat, was auch die Function F sei,

$$(c)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(l\cos\theta + m\sin\theta\cos\psi + n\sin\theta\sin\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi \\ &\qquad = 2\pi \int_{-1}^{+1} F(\mu\sqrt{l^2+m^2+n^2})\, d\mu. \end{aligned} \right.$$

Dies ist die Transformation, welche wir mit dem Ausdruck (a) vornehmen wollten.

155. Stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die Gleichung zu integriren

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Wir haben ein particuläres Integral, indem wir setzen

$$u = e^{\alpha t + \beta x + \gamma y + \delta z},$$

wo α, β, γ, δ verbunden sind durch die Gleichung

$$\alpha = \pm a\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Zieht man die beiden Werthe von u von einander ab, welche dem doppelten Zeichen von α entsprechen, und multiplicirt mit einem willkürlichen Coëfficienten, so hat man wieder eine Auflösung, welche auf die Form gebracht werden kann

$$u = Mte^{\beta x + \gamma y + \delta z}\frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{\alpha t} = Mte^{\beta x + \gamma y + \delta z}\int_{-1}^{+1} e^{\alpha t \mu}\, d\mu.$$

Wenn wir jetzt das Integral $\int_{-1}^{+1} e^{at\mu}\, d\mu$ mit Hülfe der Formel (c) der vorigen Nr. transformiren, so nimmt dieser Werth von u die folgende Form an, wo M eine willkürliche Constante ist:

$$u = Mte^{\beta x + \gamma y + \delta z} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} e^{a\beta t \cos\theta + a\gamma t \sin\theta \cos\psi + a\delta t \sin\theta \sin\psi} \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

oder

$$u = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Mte^{\beta(x + at\cos\theta)} e^{\gamma(y + at\sin\theta\cos\psi)} e^{\delta(z + at\sin\theta\sin\psi)} \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Wenn man die Summe von unendlich vielen ähnlichen Ausdrücken bildet, in welchen die Constanten β, γ, δ, M alle Werthe annehmen können, welche man will, so hat man auch eine Auflösung der Gleichung (1). Aber die Summe

$$\Sigma M e^{\beta(x + at\cos\theta)} e^{\gamma(y + at\sin\theta\cos\psi)} e^{\delta(z + at\sin\theta\sin\psi)}$$

kann, indem man die Unbestimmten M, β, γ, δ angemessen wählt, übereinstimmen mit welcher Function man will von $x + at\cos\theta$, $y + at\sin\theta\cos\psi$, $z + at\sin\theta\sin\psi$. Man hat also eine Auflösung der Gleichung (1), indem man nimmt

(2) $u =$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, F(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\cos\psi, z + at\sin\theta\sin\psi),$$

wo F eine willkürliche Function von drei Variablen bezeichnet, und der Coëfficient $\frac{1}{4\pi}$ eingeführt ist, damit man für $t = 0$ finde

$$\frac{du}{dt} = F(x, y, z).$$

Der Ausdruck (2) giebt also eine solche Auflösung der vorgelegten Gleichung, welche für $t = 0$ sich auf Null reducirt, während ihre Ableitung nach t eine willkürliche Function von x, y, z wird.

Wenn wir daher eine andere solche Auflösung der Gleichung (1) finden könnten, welche für $t = 0$ einer willkürlichen Function von x, y, z gleich würde, während ihre Ableitung in Bezug auf t sich auf Null reducirte, so würde die Summe dieser beiden Auflösungen das allgemeine Integral der

vorgelegten Gleichung bilden. Aber ein jeder Ausdruck, welcher der Gleichung (1) genügt, ist ein solcher, dass seine Ableitung nach t ihr ebenso genügt; nimmt man daher einen dem zweiten Gliede der Gleichung (2) ähnlichen Ausdruck, indem man der Function F eine andere willkürliche Function f substituirt, und differentiirt man ihn in Bezug auf t, so hat man dieses neue Integral der Gleichung (1):

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t \sin\theta\, d\theta\, d\psi f(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\cos\psi, z + at\sin\theta\sin\psi).$$

Und es ist leicht zu verificiren, dass dieser Ausdruck $f(x, y, z)$ wird, wenn man $t = 0$ macht; während seine Ableitung in Bezug auf t Null wird.

Das allgemeine Integral der Gleichung (1) ist daher

$$(3) \quad u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi F(x + at\cos\theta,\ y + at\sin\theta\cos\psi,\ z + at\sin\theta\sin\psi)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin\theta\, d\theta\, d\psi f(x + at\cos\theta, y + at\sin\theta\cos\psi, z + at\sin\theta\sin\psi),$$

und für $t = 0$ findet man

$$u = f(x, y, z),$$
$$\frac{du}{dt} = F(x, y, z).$$

Das Integral ist somit auf die bequemste Form gebracht, weil die willkürlichen Functionen, welche es enthält, gerade diejenigen sind, welche man in allen Anwendungen auf Fragen der Bewegung kennt. Sie sind diejenigen, welche den Anfangszustand des Systems, d. h. denjenigen bestimmen, welcher der Zeit $t = 0$ entspricht. Poisson ist es, dem man die Formel (3) verdankt, welche von grossem Nutzen in der mathematischen Physik ist.

156. Das Integral, welches wir gefunden haben, führt zu jenem der allgemeineren Gleichung

$$(4)\qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

In der That, wenn man setzt

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz',$$

so erhält man

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dx'^2} + \frac{d^2 u}{dy'^2} + \frac{d^2 u}{dz'^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird durch die Formel (3) gegeben; und wenn man nachher x', y', z' durch $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ ersetzt, so findet man leicht

$$(5)\quad u =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, F(x + at\cos\theta,\, y + bt\sin\theta\cos\psi,\, z + ct\sin\theta\sin\psi)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t \sin\theta\, d\theta\, d\psi\, f(x + at\cos\theta,\, y + bt\sin\theta\cos\psi,\, z + ct\sin\theta\sin\psi);$$

für $t = 0$ hat man

$$u = f(x, y, z),$$
$$\frac{du}{dt} = F(x, y, z).$$

Die Formel (5) giebt das allgemeine Integral der Gleichung (4), und die in ihr vorkommenden willkürlichen Functionen werden gegeben, wie in dem vorigen Falle, durch den Anfangszustand des Systems.

Elimination der willkürlichen Functionen.

157. Wenn eine Gleichung mit drei Variablen x, y, z eine beliebige Anzahl m willkürliche Functionen von x allein enthält, so braucht man sie nur $m$mal in Bezug auf y zu differentiiren, indem man x als constant betrachtet; man erhält auf diese Weise $m + 1$ Gleichungen, in welchen die zu eliminirenden m willkürlichen Functionen vorkommen, ohne dass

irgend eine von ihnen abhängende Grösse eingeführt worden ist; man kann also alle diese Functionen eliminiren, und man wird eine Gleichung mit partiellen Differentialen von der $m$ten Ordnung erhalten.

158. Aber wenn die willkürlichen Functionen x, y und z enthalten, so wird es nicht mehr genügen in Bezug auf nur eine Variable zu differentiiren; und damit die Elimination geschehen könne, darf man überdies nur willkürliche Functionen von bestimmten Functionen von x, y, z haben.

Nehmen wir z. B. an die Gleichung

$$(1) \qquad F[x, y, z, f(\varphi)] = 0,$$

wo φ eine bekannte Function von x, y, z ist und f eine willkürliche Function bezeichnet.

Indem man die Gleichung successive in Bezug auf x und y differentiirt, erhält man, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ setzend,

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} p + \frac{dF}{df} \cdot \frac{df}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} p\right) = 0,$$
$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} q + \frac{dF}{df} \cdot \frac{df}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} q\right) = 0.$$

Man hat somit drei Gleichungen, welche f und $\frac{df}{d\varphi}$ enthalten. Indem man sie eliminirt, erhält man eine Gleichung mit partiellen Differentialen von der ersten Ordnung.

Wäre die Gleichung (1) in Bezug auf f aufgelöst gewesen, so hätte man nur $\frac{df}{d\varphi}$ zwischen den beiden derivirten Gleichungen zu eliminiren gehabt.

159. Wenn die gegebene Gleichung zwei willkürliche Functionen $f(\varphi)$, $f_1(\varphi_1)$ von gegebenen Functionen φ, φ_1 enthielte, so würden die beiden Differentiationen der ersten Ordnung $\frac{df}{d\varphi}$, $\frac{df_1}{d\varphi_1}$ einführen, und die drei Gleichungen würden nicht mehr genügen zur Elimination von diesen beiden Functionen und f, f_1.

Man wird dann die Gleichungen der ersten Ordnung successive in Bezug auf x und y differentiiren, und dadurch drei

neue Gleichungen und zwei neue zu eliminirende Functionen, nämlich $\frac{d^2f}{d\varphi^2}$, $\frac{d^2f_1}{d\varphi_1{}^2}$ erhalten. Man hat also sechs Gleichungen und sechs Functionen, die zu eliminiren sind; was noch nicht geschehen kann.

Indem man die Gleichungen der zweiten Ordnung differentiirt, wird man $\frac{d^3f}{d\varphi^3}$, $\frac{d^3f_1}{d\varphi_1{}^3}$ einführen, und vier neue Gleichungen erhalten. Zwischen drei dieser letzten und den sechs vorhergehenden wird man die beiden Functionen f, f_1 und ihre Ableitungen bis zur dritten Ordnung eliminiren; man wird so eine Partialgleichung dritter Ordnung erhalten, in welcher keine Spur der Functionen f und f_1 vorhanden ist, und welche einen Charakter ausdrückt, den alle Gleichungen gemeinsam haben, welche sich von der vorgelegten nur durch die Natur dieser Funtionen unterscheiden.

160. Allgemein, wenn eine Gleichung mit drei Variablen n willkürliche Functionen bestimmter Functionen von x, y, z enthält, so wird man, indem man successive in Bezug auf x und y bis zur $m$ten Ordnung inclusive differentiirt, eine Anzahl $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ von Gleichungen und $(m+1)\,n$ zu eliminirende Functionen erhalten. Damit dies geschehen könne, so muss man haben

$$\frac{m+2}{2} > n \text{ oder } m > 2n-2\,.$$

Die Ordnung der Partialgleichung wird also $2n-1$ sein.

In analoger Weise würde man verfahren, wenn die Anzah der Variablen grösser wäre als drei.

161. Wenn die Functionen f, f_1 etc. nicht in einer bestimmten Weise x, y, z durch die bekannten Functionen φ, φ_1 etc. enthalten, so kann man sie nicht eliminiren.

Wenn z. B. eine Gleichung mit drei Variablen eine vollkommen willkürliche Function von x und y enthielte, so würde man bei jeder Ordnung der Differentiation ebenso viele zu eliminirende Functionen einführen als Gleichungen: die Elimination würde also unmöglich sein.

Aber wenn die vorgelegte Gleichung vier Variablen x, y, z, u enthielte, so würde man durch Differentiiren in Bezug auf z allein keine neue Function einführen; und folglich könnte man so viele willkürliche Functionen von x und y eliminiren, als man will; ebenso wie wir gesehen haben, dass man, von einer Gleichung zwischen x, y, z ausgehend, willkürliche Functionen von x eliminiren kann.

Allgemeine Integration der Gleichung, in welcher die partiellen Differentiale nur im ersten Grade und in der ersten Ordnung vorkommen.

162. Stellen wir uns die Aufgabe, das allgemeine Integral zu finden von einer Gleichung zwischen einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variablen, einer Function dieser Variablen und ihren partiellen Ableitungen, welche linear darin vorkommen. Betrachten wir z. B. eine Function u dreier unabhängigen Variablen x, y, z. Die gegebene Gleichung wird von der Form sein

$$(1) \qquad P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} = S,$$

wo P, Q, R, S beliebige Functionen von x, y, z, u sind.

Wenn diese Gleichung eine Auflösung hat, wie wir dies übrigens wissen, so kann sie unter die Form $\varphi(x, y, z, u) = 0$ gebracht werden, und man kann die Function φ anstatt u einführen, was der Gleichung eine symmetrische Form giebt, welche uns sehr vortheilhaft sein wird. In der That, man hat

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{du}}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\varphi}{du}}, \quad \frac{du}{dz} = -\frac{\frac{d\varphi}{dz}}{\frac{d\varphi}{du}},$$

und die vorgelegte Gleichung wird

$$(2) \qquad P\frac{d\varphi}{dx} + Q\frac{d\varphi}{dy} + R\frac{d\varphi}{dz} + S\frac{d\varphi}{du} = 0.$$

Also muss, wenn $\varphi = 0$ eine Auflösung der Aufgabe darstellt, die Function φ der vier als unabhängig betrachteten Variablen

x, y, z, u dieser Gleichung genügen; und umgekehrt wird jede ihr genügende Function, indem man sie gleich Null setzt, eine Function u von x, y, z geben, welche der vorgelegten Gleichung genügt. Wir können uns daher darauf beschränken, die allgemeinste Function von x, y, z, u zu suchen, welche der Gleichung (2) genügt; und wir werden dies thun mit Hülfe einer wichtigen Bemerkung, welche wir gemacht haben über die Integrale der simultanen Differentialgleichungen. In der That, wir haben in Nr. 74 bewiesen, dass wenn man durch $\psi(x, y, z, u) = c$ irgend eines der drei Integrale der simultanen Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = A, \frac{dz}{dx} = B, \frac{du}{dx} = C$$

darstellt, man hat, was auch x, y, z, u seien,

$$\frac{d\psi}{dx} + A\frac{d\psi}{dy} + B\frac{d\psi}{dz} + C\frac{d\psi}{du} = 0;$$

also würde die Function ψ eine Auflösung der Gleichung (2) sein, wenn man nähme

$$A = \frac{Q}{P}, B = \frac{R}{P}, C = \frac{S}{P},$$

d. h. wenn ψ eines der in Bezug auf die Constanten aufgelösten Integrale des Systems

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}, \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}, \frac{du}{dx} = \frac{S}{P}$$

wäre, welches man schreiben kann unter der abgekürzten Form

(3) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{S}.$$

Man kann sogar bemerken, dass eine willkürliche Function $F(\psi)$ von der Function ψ auch der Gleichung (2) genügen würde, weil ihre Substitution nur den Factor $\frac{dF}{d\psi}$ einführen würde.

Wenn man also die Integrale der Gleichungen (3) repräsentirt durch

$$\psi(x, y, z, u) = c, \quad \psi_1(x, y, z, u) = c_1, \quad \psi_2(x, y, z, u) = c_2,$$

so hat man Auflösungen der Gleichung (2), indem man eine willkürliche Function, sei es von ψ, sei es von ψ_1 oder ψ_2,

nimmt. Aber es ist leicht zu sehen, dass man auch noch eine Auflösung haben würde, wenn man eine willkürliche Function der drei, $F(\psi, \psi_1, \psi_2)$, nähme.

Denn die Substitution einer solchen Function statt φ in der Gleichung (2) würde die Summe der Resultate geben, welche ψ, ψ_1, ψ_2 einzeln liefern würden, wofern man das erste mit $\frac{dF}{d\psi}$, das zweite mit $\frac{dF}{d\psi_1}$ und das dritte mit $\frac{dF}{d\psi_2}$ multiplicirte. Man hat also eine Auflösung der Gleichung (2) in $\varphi = F(\psi, \psi_1, \psi_2)$, und folglich hat man eine Auflösung der vorgelegten (1), indem man setzt $F(\psi, \psi_1, \psi_2) = 0$ oder, was dasselbe ist,

$$(4) \qquad \psi_2 = f(\psi, \psi_1),$$

wo F und f vollkommen willkürliche Functionen repräsentiren. Es bleibt zu zeigen, dass dies das allgemeine Integral ist; oder, mit anderen Worten, dass indem man x einen besonderen Werth, Null z. B., giebt, man die Function f so bestimmen kann, dass u eine willkürliche Function von y und z wird.

Es bezeichne $\chi(y, z)$ eine willkürlich gewählte Function; untersuchen wir, ob man f so bestimmen kann, dass der Gleichung

$$(5) \qquad \psi_2(0, y, z, u) = f[\psi(0, y, z, u), \ \psi_1(0, y, z, u)]$$

genügt wird, was auch y und z seien, wenn man u durch $\chi(y, z)$ ersetzt. Setzen wir hierzu

$$(6) \qquad \psi(0, y, z, u) = v, \quad \psi_1(0, y, z, u) = w, \quad \chi(y, z) = u,$$

und führen wir die unabhängigen Variablen v und w statt y, z ein; die Gleichung (5) soll stattfinden, was auch v und w seien, wenn man darin die durch die Gleichungen (6) sich ergebenden Substitutionen gemacht hat, welche Gleichungen für u, y, z bekannte Functionen von v, w liefern. Indem man durch $\omega(v, w)$ die bekannte Function bezeichnet, auf welche das erste Glied der Gleichung (5) sich reducirt, so wird man dann, was auch v und w seien, der Gleichung

$$\omega(v, w) = f(v, w)$$

zu genügen haben, was die Form der Function f bestimmt.

In welcher Weise man übrigens u, y, z eliminire, so wird man eine Gleichung erhalten, welche die Function enthalten

und bestimmen wird. Die Gleichung (4) ist mithin das allgemeine Integral der Gleichung (1), weil sie ihr genügt und für $x = 0$ eine willkürliche Function von y und z giebt.

Diese Methode, welche von Jacobi herrührt, und welche wir für eine Gleichung zwischen vier Variablen auseinandergesetzt haben, findet offenbar bei jeder Zahl von Variablen Anwendung, und es wäre unnöthig irgend etwas in dieser Beziehung hinzuzufügen. Es erübrigt uns nur einige Anwendungen von ihr zu machen.

Integration der partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung, welche cylindrische Flächen, conische Flächen, Conoide und Rotationsflächen darstellen.

163. Wir werden damit anfangen, dass wir an die endlichen und die Differentialgleichungen dieser Flächen erinnern.

Endliche Gleichungen dieser Oberflächen. — Eine Cylinderfläche ist diejenige, welche von einer Gerade erzeugt wird, die sich parallel zu einer festen Richtung bewegt, indem sie sich beständig auf eine gegebene Linie stützt, welche Directrix genannt wird.

Es seien

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der Directrix, und

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

diejenigen irgend einer Erzeugenden, wo a und b constant sind und α, β von einer Erzeugenden zur anderen variiren. Die Bedingung des Durchschneidens dieser Erzeugenden und der Leitlinie wird erhalten, indem man x, y, z zwischen ihren Gleichungen eliminirt; woraus eine Gleichung resultiren wird von der Form

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Man erhält also die Gleichung des Orts der Erzeugenden, indem man α, β eliminirt zwischen dieser Gleichung und jenen der Erzeugungslinie; was zur allgemeinen Gleichung der cylindrischen Flächen giebt

$$\varphi(x - az, \quad y - bz) = 0,$$

wo φ irgend eine Function bezeichnen kann, oder, indem man sie in Bezug auf $x - az$ auflöst,

$$x - az = f(y - bz).$$

Man kann übrigens verificiren, dass was auch die Function f sei, diese Gleichung eine Cylinderfläche darstellt.

164. Eine conische Fläche ist diejenige, welche von einer Gerade erzeugt wird, die durch einen festen Punkt geht und sich auf eine gegebene Linie stützt.

Es seien

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen dieser Leitlinie, und α, β, γ die Coordinaten des festen Punktes; die Gleichungen irgend einer Erzeugenden werden sein

$$x - \alpha = a(z - \gamma), \quad y - \beta = b(z - \gamma),$$

wo a und b von einer Erzeugenden zur anderen variiren. Damit die Directrix immer von der Erzeugenden getroffen werde, so müssen diese vier Gleichungen zu gleicher Zeit stattfinden; woraus, indem man x, y, z eliminirt, die Bedingungsgleichung hervorgeht

$$\varphi(a, b) = 0.$$

Die Gleichung des Orts der Erzeugungslinien erhält man, indem man a und b zwischen dieser Gleichung und den beiden vorigen eliminirt; was zur allgemeinen Gleichung der Kegelflächen giebt

$$\varphi\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}, \quad \frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = f\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right);$$

und man kann wieder verificiren, dass was auch die Function f sei, diese Gleichung eine Kegelfläche repräsentirt.

165. Ein Conoid ist die Oberfläche, welche erzeugt wird durch eine Gerade, die parallel zu einer festen Ebene sich bewegt, und beständig eine gegebene Gerade und eine gegebene Curve trifft. Nehmen wir die gegebene Gerade zur Axe

der z, und die feste Ebene zur Ebene der x und y, und es seien

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der gegebenen Curve; diejenigen der Erzeugungslinie sind von der Form

$$z = a, \quad y = bx.$$

Indem man x, y, z zwischen diesen vier Gleichungen eliminirt, erhält man eine Gleichung zwischen a und b, welche die letzte Bedingung ausdrückt, der die Erzeugende genügen muss. Es sei $a = \varphi(b)$ diese Gleichung, so erhält man diejenige der gesuchten Oberfläche, indem man a und b zwischen ihr und den Gleichungen der Erzeugenden eliminirt.

Man findet so

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die Function φ ist willkürlich, weil F, F_1 beliebige Functionen bezeichnen. Uebrigens verificirt man leicht, dass was auch diese Function φ sei, die vorstehende Gleichung diejenige eines Conoids ist.

166. Eine Rotationsfläche wird erzeugt durch irgend eine Linie, welche sich um eine feste Axe dreht, indem sie immer dieselbe relative Lage zu ihr behält; so dass bei dieser Bewegung jeder Punkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt auf der Axe liegt und dessen Ebene zu dieser Axe senkrecht ist.

Nehmen wir den Ursprung in einem Punkte der Axe, und es seien

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der Erzeugenden in einer ihrer Lagen; diejenigen der Axe sind von der Form

$$x = az, \quad y = bz.$$

Ein beliebiger von den Kreisen der Oberfläche wird zu Gleichungen haben

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z + ax + by = C.$$

Damit es einen gemeinschaftlichen Punkt mit der Erzeugungscurve gebe, so müssen R und C der Gleichung genügen, welche

man erhält, indem man x, y, z zwischen den vier Gleichungen dieser Linien eliminirt. Es sei diese Bedingungsgleichung

$$\varphi(R^2, C) = 0,$$

so erhält man die Gleichung des Orts der Kreise oder der Rotationsfläche, indem man R und C zwischen dieser Gleichung und jenen irgend eines dieser Kreise eliminirt; man findet so

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2, \quad z + ax + by) = 0,$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(z + ax + by).$$

Wenn man den Ursprung in irgend einen Punkt versetzt, dessen Coordinaten in Bezug auf den ersten $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ sind, so wird die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen die Form haben

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = f[z-\gamma + a(x-\alpha) + b(y-\beta)].$$

167. Ihre partiellen Differentialgleichungen. — Die cylindrischen Oberflächen besitzen exclusive die Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte die Tangentialebene parallel ist zu einer festen Gerade, deren Richtung diejenige der Erzeugungslinien ist.

Es seien $x = az$, $y = bz$ die Gleichungen, welche diese Richtung bestimmen, und $z = F(x, y)$ die Gleichung einer Oberfläche. Ihre Tangentialebene im Punkte $(x' \, y' \, z')$ hat zur Gleichung

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y').$$

Damit sie parallel sei zu der gegebenen Gerade, was auch der Berührungspunkt sei, so muss man haben

$$1 = a\frac{dz'}{dx'} + b\frac{dz'}{dy'}.$$

Die allgemeine Gleichung der Cylinderflächen ist also

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1.$$

168. Die charakteristische Eigenschaft der conischen Flächen besteht darin, dass ihre Tangentialebene in irgend einem Punkte durch einen festen Punkt geht. Es seien α, β, γ die Coordinaten dieses Punktes; da die allgemeine Gleichung der Tangentialebene an einer Oberfläche ist

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y'),$$

so wird die Tangentialebene beständig durch den festen Punkt gehen, wenn man für alle Punkte der Oberfläche hat

$$\gamma - z' = \frac{dz'}{dx'}(\alpha - x') + \frac{dz'}{dy'}(\beta - y');$$

die allgemeine Gleichung der Kegelflächen ist daher

$$(x - \alpha)\frac{dz}{dx} + (y - \beta)\frac{dz}{dy} = z - \gamma.$$

169. Da die Tangentialebene an einem Conoid die durch den Berührungspunkt geführte Erzeugende enthalten muss, so wird sie die Axe der z schneiden in einem Punkte, dessen z gleich demjenigen des Berührungspunktes ist, wenn man sich die Axen wie oben gewählt denkt. Der Gleichung der tangirenden Ebene

$$z - z' = \frac{dz'}{dx'}(x - x') + \frac{dz'}{dy'}(y - y')$$

muss daher genügt werden durch $x = 0$, $y = 0$, $z = z'$; was für jeden Punkt der Oberfläche giebt

$$x'\frac{dz'}{dx'} + y'\frac{dz'}{dy'} = 0.$$

Die allgemeine Gleichung aller Conoide, was auch die Leitcurve sei, ist mithin

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0.$$

170. Die Rotationsflächen haben die charakteristische Eigenschaft, dass die in irgend einem ihrer Punkte geführte Normale ihre Axe trifft.

Es seien

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Axe. Eine Normale zu irgend einer Fläche hat die Gleichungen

$$x - x' + \frac{dz'}{dx'}(z - z') = 0, \quad y - y' + \frac{dz'}{dy'}(z - z') = 0;$$

damit sie die Axe treffe, so muss man die Bedingung haben

$$\frac{x' - \alpha + z'\dfrac{dz'}{dx'}}{\dfrac{dz'}{dx'} + a} = \frac{y' - \beta + z'\dfrac{dz'}{dy'}}{\dfrac{dz'}{dy'} + b}.$$

Indem man diese Gleichung reducirt, und die Accente weglässt, erhält man die allgemeine Gleichung der Rotationsflächen, welche sein wird

$$(y - bz - \beta)\frac{dz}{dx} - (x - az - \alpha)\frac{dz}{dy} = b(x - \alpha) - a(y - \beta).$$

Man hätte diese verschiedenen Differentialgleichungen ableiten können aus den endlichen Gleichungen, durch Eliminiren der willkürlichen Function.

Wir wollen nun umgekehrt sehen, wie man von den Differentialgleichungen zurückgehen kann zu den endlichen Gleichungen.

171. Integration der Gleichungen dieser Flächen. Cylindrische Flächen. — Die Differentialgleichung der Cylinderflächen ist, indem man $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ setzt,

$$ap + bq = 1.$$

Nach der oben angegebenen Methode von Jacobi wird man die beiden simultanen Gleichungen ansetzen

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = dz,$$

deren Integrale sind $x - az = C$, $y - bz = C_1$; woraus hervorgeht, dass das Integral der vorgelegten Gleichung ist

$$x - az = F(y - bz),$$

wo F eine willkürliche Function bezeichnet, welche sich durch eine besondere Bedingung bestimmen wird. Nehmen wir zunächst an, dass die Cylinderfläche durch eine gegebene Curve gehen soll, welche zu Gleichungen hat

$$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0;$$

damit es leichter sei, die Form der Function F zu bestimmen, werden wir die dahinter stehende Grösse durch einen Buchstaben bezeichnen. Es sei also

$$y - bz = u,$$

wir werden überall y durch $bz + u$ ersetzen. Die Gleichung der Oberfläche wird

$$x - az = F(u),$$

und diejenigen der Curve verändern sich in

$$f(x, bz + u, z) = 0, \quad f_1(x, bz + u, z) = 0,$$

und diesen drei Gleichungen soll durch unendlich viele Werthe von x, z, u genügt werden. Wenn man daher x und z zwischen ihnen eliminirt, so muss der Gleichung in u genügt werden durch jedes u, oder, mit anderen Worten, sie muss identisch sein. Man wird also die Form der Function F finden, indem man aus dieser Gleichung den Werth von $F(u)$ zieht. Die Gleichung der Oberfläche

$$x - az = F(y - bz)$$

wird dann vollkommen bestimmt sein.

Man braucht aber nicht die aus der Elimination resultirende Gleichung in Bezug auf F aufzulösen. Denn es sei

$$\varphi[u, F(u)] = 0$$

diese Gleichung; indem man darin u durch $y - bz$ und $F(u)$ durch $x - az$ ersetzt, erhält man zur Gleichung der vorgelegten Fläche

$$\varphi(y - bz, x - az) = 0.$$

Wenn die cylindrische Fläche einer gegebenen Oberfläche umgeschrieben werden soll, so wird man zunächst die Punkte dieser Oberfläche bestimmen, für welche die tangirende Ebene parallel ist zu der gegebenen Richtung der Erzeugungslinien; und hierzu wird es genügen auszudrücken, dass sie der Differentialgleichung der Cylinderfläche genügen. Wenn diese Linie bestimmt ist, so befindet sich die Aufgabe in dem vorigen Falle.

172. Conische Flächen. — Ihre Differentialgleichung ist

$$(x - \alpha)p + (y - \beta)q = z - \gamma.$$

Man wird zuerst die Gleichungen integriren

$$\frac{dx}{x - \alpha} = \frac{dy}{y - \beta} = \frac{dz}{z - \gamma};$$

dies führt zu

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = C, \quad \frac{y - \beta}{z - \gamma} = C_1,$$

und das Integral der vorgelegten Gleichung ist

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = f\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right),$$

wo f eine willkürliche Function bezeichnet.

Setzen wir voraus, um sie zu bestimmen, dass die Fläche gehen soll durch eine Curve, deren gegebene Gleichungen sind

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0;$$

man wird setzen

$$\frac{y-\beta}{z-\gamma} = u,$$

die Gleichungen der Oberfläche und der gegebenen Linie werden

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = f(u), \; F[x, \beta + (z-\gamma)u, z] = 0, \; F_1[x, \beta + (z-\gamma)u, z] = 0.$$

Da diese drei Gleichungen unendlich viele gemeinschaftliche Auflösungen haben sollen, so muss, wenn man x und z eliminirt, die Endgleichung in u identisch sein, und der Werth, welchen man aus ihr für $f(u)$ ziehen wird, bestimmt die Form der willkürlichen Function.

Wenn die Kegelfläche einer gegebenen Fläche umgeschrieben werden soll, so wird man zuerst den Ort der Punkte dieser Fläche suchen, welche der Differentialgleichung der Kegelfläche genügen; das Problem kommt dann auf das gelöste zurück.

173. Conoide. — Ihre allgemeine Gleichung ist

$$px + qy = 0.$$

Die simultanen Gleichungen, welche man integriren muss, sind also

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \text{ und } \frac{dx}{x} = \frac{dz}{0} \text{ oder } dz = 0.$$

Man zieht daraus $z = a$, $y = bx$, wo a und b die willkürlichen Constanten. Das allgemeine Integral ist daher

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo φ eine willkürliche Function bezeichnet.

Will man diese Function bestimmen durch die Bedingung, dass die Oberfläche eine Curve von den Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

enthalte, so wird man $\frac{y}{x} = u$ und $y = ux$ setzen in den drei Gleichungen, welche unendlich viele gemeinschaftliche Auflösungen zulassen sollen.

Man erhält so

$$z = \varphi(u), \quad F(x, ux, z) = 0, \quad F_1(x, ux, z) = 0.$$

Wenn man x und z eliminirt, so wird die in u identisch zu machende Gleichung, welche daraus hervorgeht, die Form der gesuchten Function φ erkennen lassen.

Man würde verfahren wie in den beiden vorigen Fällen, wenn das Conoid einer gegebenen Oberfläche umgeschrieben sein sollte.

174. Rotationsflächen. — Die Differentialgleichung dieser Flächen ist, indem man den Ursprung in einem Punkt der Axe nimmt,

$$(y - bz)\,p - (x - az)\,q = bx - ay.$$

Man muss zuerst die simultanen Gleichungen integriren

$$\frac{dx}{y - bz} = \frac{-dy}{x - az} = \frac{dz}{bx - ay},$$

oder

$$(bx - ay)\,dx = (y - bz)\,dz,$$
$$-(bx - ay)\,dy = (x - az)\,dz.$$

Multiplicirt man die erste mit a, die zweite mit b, und zieht von einander ab, so findet man, durch $bx - ay$ theilend,

$$a\,dx + b\,dy = -dz,$$

woraus

$$z + ax + by = c.$$

Wenn man aber die erste mit x, die zweite mit y multiplicirt, und sie addirt, so wird man finden

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

woraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1;$$

das Integral der vorgelegten Gleichung ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 = f(z + ax + by).$$

Bestimmen wir die willkürliche Function durch die Bedingung, dass die Oberfläche die Curve von den Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

enthalte; hierzu setzen wir wieder

$$z + ax + by = u,$$

und eliminiren wie in den vorhergehenden Aufgaben x, y, z zwischen dieser Gleichung, der der Oberfläche und denen der gegebenen Curven; die Endgleichung in u muss identisch werden und bestimmt also die Function $f(u)$.

Wie in den vorhergehenden Fällen würde man verfahren, wenn verlangt würde, dass die Rotationsfläche einer gegebenen Oberfläche umgeschrieben sein soll.

Variationsrechnung.

175. Die Variationsrechnung ist von Lagrange zur Auflösung einer neuen Art von Aufgaben über die Maxima und Minima erdacht worden.

In den gewöhnlichen Aufgaben giebt man die Form eines Ausdrucks, welcher eine oder mehrere unbekannte Grössen enthält, und man sucht die Maximawerthe dieses Ausdrucks, sowie die besonderen Werthe der Unbekannten, welche ihnen entsprechen.

In diesen neuen Aufgaben giebt man den Ausdruck eines Differentials, welcher unbekannte Functionen von x, sowie ihre Ableitungen von irgend einer Ordnung in Bezug auf x enthält, und man stellt sich die Aufgabe, diese Functionen so zu bestimmen, dass das Integral, zwischen gewissen Grenzen genommen, einen Maximum- oder Minimumwerth habe.

Der Unterschied, welchen man zunächst bemerkt zwischen diesen und den anderen Aufgaben über Maxima und Minima besteht also darin, dass die Unbekannten nicht bestimmte Werthe sind, sondern Functionen der Variable, in Bezug auf welche die Integration ausgeführt werden soll.

176. Der zur Auflösung dieser Arten von Aufgaben zu befolgende Weg ist derselbe wie für die anderen. Man nimmt die gesuchten Functionen als bekannt an, man lässt sie unendlich wenig variiren, indem man allen Bedingungen genügt; und

man drückt aus, dass in allen Fällen der Werth des Integrals abnimmt, wenn er ein Maximum sein soll, oder dass er zunimmt, wenn er ein Minimum sein soll.

Man muss also damit anfangen, dass man die allgemeinen Regeln giebt, vermöge welcher man das unendlich kleine Increment der Integrale, und zunächst der Grössen, welche unter dem Integrationszeichen stehen können, bestimmen kann. Aber, bevor wir uns damit beschäftigen, wollen wir das Vorstehende durch die Betrachtung einer besonderen Aufgabe erläutern.

177. Man giebt zwei feste Punkte und eine in derselben Ebene mit ihnen gelegene Gerade, welches ist die durch diese beiden Punkte gehende Curve, welche beim Rotiren um die feste Gerade eine kleinste Oberfläche erzeugt?

Nimmt man diese Gerade zur Axe der x, theilt man die Entfernung der Projectionen der beiden Punkte in unendlich viele Theile, und legt man durch die Theilungspunkte senkrechte Ebenen zur Axe, so wird die erzeugte Oberfläche in unendlich viele Elemente getheilt, deren allgemeiner Ausdruck ist $2\pi y\, ds$, und welche allen Werthen von x zwischen den gegebenen Grenzen x_1, x_2 entsprechen. Es muss also das Integral $\int_{x_1}^{x_2} y\, ds$ wachsen, indem man von der gesuchten Curve zu jeder anderen Nachbarcurve übergeht. Und in dem Integrale $\int_{x_1}^{x_2} y'\, ds'$, welches sich auf irgend eine unter ihnen bezieht, können die Elemente $y'\, ds'$ sich beziehen auf Theilungspunkte der Axe, welche nicht dieselben sind wie für das erste; es genügt, dass die Grenzen dieselben sind. So dass, wenn man die beiden Integrale Element für Element vergleichen wollte, es genügen würde die Elemente beiderseits in derselben Zahl anzunehmen, und man ein beliebiges Gesetz zwischen den Abscissen zweier correspondirenden Elemente festsetzen könnte; aber es wird vortheilhaft sein, sie unendlich wenig verschieden von einander anzunehmen.

Die Grenzen x_1, x_2 könnten unbekannt, aber gewissen Bedingungen unterworfen sein. Man könnte z. B. fragen, welches die Curve ist, die, indem sie ihre Endpunkte auf zwei gegebenen Curven hat, und um eine in derselben Ebene liegende

Gerade rotirt, eine kleinste Oberfläche erzeugt. In diesem Falle würde man, ob man die Curve gefunden habe, welche die Aufgabe löst, daran erkennen, dass das Integral $\int_{x_1}^{x_2} y\,ds$ zunimmt, wenn man jede andere Curve betrachtet, deren Punkte der ersten unendlich nahe liegen, und welche ihre Endpunkte auf den gegebenen Curven in unendlich kleiner Entfernung von den Endpunkten der ersten hat.

Will man die Elemente der beiden Integrale zu zwei und zwei von dem ersten bis zum letzten mit einander vergleichen, so könnte man in diesem Falle sie nicht als derselben Abscisse entsprechend betrachten, weil die Abscissen der Endpunkte nothwendig verschieden sind. Es ist daher manchmal nöthig, und immer erlaubt, die beiden Integrale, welche man vergleichen will, zu betrachten als zerlegt in dieselbe Anzahl Elemente, welche Werthen von x entsprechen, die unendlich wenig verschieden und mit einander durch ein willkürliches Gesetz verbunden sind.

Von den Variationen.

178. Wenn man irgend ein Element eines Integrals betrachtet und zu seinem correspondirenden übergeht, so werden die Incremente der Grössen, von welchen es abhängt, die Variationen dieser Grössen genannt. Man behält den Namen Differentiale bei für die Incremente, welche dieselben Grössen erleiden, indem man immer in dem System bleibt, welches sich auf das nämliche Integral bezieht. Man unterscheidet die Variationen von den Differentialen durch das Zeichen δ, welches man dem Zeichen d substituirt, und man denkt sich dieselben immer unendlich klein.

Es sei also y eine der unbekannten Functionen von x, welche in dem Ausdruck unter dem Zeichen $\int$ vorkommen; δy ist das unendlich kleine Increment, welches diese Function annimmt, wenn man von einem Elemente des ersten Integrals übergeht zu seinem correspondirenden in dem zweiten. Indem man y als die Ordinate einer Curve betrachtet, wird $y + \delta y$ die Ordinate der Curve nach ihrer Variation sein, und sie



wird derselben Abscisse wie y in der ersten entsprechen in dem Falle, wo die correspondirenden Punkte sich auf denselben Werth von x beziehen; dagegen wird $y + \delta y$ die der Abscisse $x + \delta x$ entsprechende Ordinate sein, wenn δx die, wie δy, unendlich kleine und stetige Function von x ist, welche die Differenz der Abscissen der Punkte ausdrückt, welche man in den beiden Integralen correspondiren lässt. In diesem letzteren Falle ist es vielleicht bequemer, x und y, sowie δx, δy zu betrachten als Functionen einer und derselben willkürlichen Variable t, welche selbst keineswegs in den gegebenen Ausdruck eingeht, und dann wird die Function unter dem Zeichen $\int$ die Differentiale dx, $d^2x, \ldots$, ebenso wohl wie dy, $d^2y, \ldots$ enthalten, alle auf eine und dieselbe Variable bezogen, welche nicht einmal bezeichnet zu werden braucht.

Wenn man die Variationen aller Grössen, welche in einer Function vorkommen, kennt, so bestimmt sich die Variation dieser Function nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung, welche das unendlich kleine Increment einer Function nach den Incrementen aller in ihr vorkommenden Variablen finden lehren. Man hat also allgemein

$$(1) \qquad \delta F(u,v,w,\ldots) = \frac{dF}{du}\,\delta u + \frac{dF}{dv}\,\delta v + \frac{dF}{dw}\,\delta w + \ldots.$$

179. Versetzung der Zeichen d und δ. — Es ist wichtig zu bemerken, dass man in allen Fällen die Reihenfolge der Operationen umkehren kann, wenn man das Differential und die Variation irgend einer Function v nimmt. In der That, es sei $v + \delta v$ was aus der Function v wird, indem man von dem ersten System zum zweiten übergeht. Wenn man t in $t + dt$ verändert, so wird das $n$te Differential der Function in dem zweiten System sein $d^n v + d^n \delta v$. Also hat das Differential $d^n v$ der Function in dem ersten System zur Variation $d^n \delta v$; man hat daher

$$(2) \qquad \delta d^n v = d^n \delta v.$$

Hierdurch sind die Variationen aller Differentiale einer Function durch die Variation der Function selbst bestimmt, und es geht daraus hervor, dass man die Variation irgend einer Function von x, y, $z, \ldots$ und ihren Differentialen ausdrücken kann durch die Variationen dieser Grössen x, y, z und die

Differentiale dieser Variationen. Man braucht nur Gebrauch zu machen von der Formel (1), in welcher $u, v, w, \ldots$ ersetzt sind durch $x, y, z, \ldots, dx, dy, dz, \ldots, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$.

Indem man also durch $A, B, C, \ldots, A_1, B_1, C_1, \ldots, A_2, B_2, C_2, \ldots$ die partiellen Ableitungen in Bezug auf diese Grössen $x, \ldots, dx, \ldots, d^2x, \ldots$ von einer Function

$$F(x, y, z, \ldots, dx, dy, dz, \ldots, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots)$$

darstellt, hat man

$$(3)\begin{cases} \delta F = A\delta x + B\delta y + C\delta z + \ldots + A_1 d\delta x + B_1 d\delta y + C_1 d\delta z + \ldots \\ \qquad + A_2 d^2\delta x + B_2 d^2\delta y + \ldots . \end{cases}$$

180. Aber es ereignet sich oft, dass die Differentiale alle genommen sind in Bezug auf eine besondere Variable, welche in der Aufgabe vorkommt; alsdann enthalten die Ausdrücke, welche man zu betrachten hat, nur die Ableitungen aller anderen Variablen in Bezug auf diese, und man hat nöthig die Variationen dieser Ableitungen zu berechnen. Man könnte sie zwar aus der Variation der Differentiale herleiten, indem man zuerst diese Ableitungen ausdrückte in Differentiale, welche genommen sind in Bezug auf irgend eine unabhängige Variable; aber es ist besser die Aufgabe direct zu behandeln.

Es sei y eine Function von x, welche wir darstellen können als die Ordinate einer Curve, von welcher x die Abscisse sein würde. Stellen wir durch Y und X dar, was aus y und x wird; die Differenz $\frac{d^n Y}{dX^n} - \frac{d^n y}{dx^n}$ wird die Variation von $\frac{d^n y}{dx^n}$ sein oder $\delta \frac{d^n y}{dx^n}$, und es handelt sich darum, sie auszudrücken durch die Variationen von x und y und die Ableitungen dieser Variationen. Es sind zwei Fälle zu untersuchen, je nachdem X identisch mit x oder davon verschieden ist.

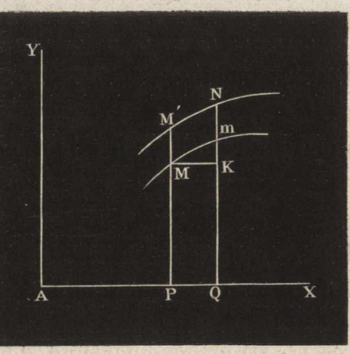
1. Nehmen wir an, dass X sich nicht von x unterscheide, oder dass man habe $\delta x = 0$, d. h., betrachten wir als correspondirend auf zwei unendlich nahen Curven die Punkte M, N, welche irgend einer und derselben Abscisse AP entsprechen; MN wird δy sein, und man erhält, in Bezug auf x die beiden Glieder der Gleichung $Y = y + \delta y$ differentiirend,

$$\frac{d^n Y}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^n \delta y}{dx^n};$$

woraus hervorgeht

$$(4) \qquad \delta \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \delta y}{dx^n}.$$

Fig. 2. Fig. 3.



2. Nehmen wir jetzt an, dass die correspondirenden Punkte M und N verschiedene Abscissen AP, AQ haben; man hat

$AP = x$, $MP = y$, $AQ = X$, $NQ = Y$, $PQ = \delta x$, $NK = \delta y$,

und wenn x um gleiche Incremente wächst, so wird X nicht um gleiche Incremente wachsen, weil $X = x + \delta x$, und weil δx eine Function ist von x oder von einer willkürlich gewählten unabhängigen Variable. Also wird Differentiiren in Bezug auf x oder auf X nicht dieselbe Operation sein, und die Gleichung

$$Y = y + \delta y$$

würde nicht wie in dem vorigen Falle zu

$$\frac{d^n Y}{dX^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^n \delta y}{dx^n}$$

führen. Es ist auch nicht der Fall der Anwendung der Formel (3), weil $d^n Y$ und $d^n y$ sich nicht mehr auf die gleichen Incremente derselben Variable beziehen. Man muss also die Differenz $\frac{d^n Y}{dX^n} - \frac{d^n y}{dx^n}$ direct berechnen.

Bezeichnen wir durch u die Ordinate $M'P$ der variirten Curve für dieselbe Abscisse x wie das y der ersten Curve,

welches MP ist, und durch ω die Differenz $M'M$, welche δy sein würde, wenn man $\delta x = 0$ voraussetzte. Man hat nun $u = \omega + y$; und, indem man bemerkt, dass man Nm und $M'M$ als gleich betrachten kann, und dass $mK = \frac{dy}{dx}\delta x$, hat man

$$\delta y = \omega + \frac{dy}{dx}\delta x.$$

Die Gleichung

$$u = \omega + y$$

$n$mal differentiirend, erhält man

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^n \omega}{dx^n} + \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Da aber die Punkte M' und N derselben Curve angehören, so sind die $n$ten Ableitungen der Ordinaten dieser beiden Punkte in Bezug auf ihre respectiven Abscissen x und X nichts Anderes als Werthe einer und derselben Function, in welcher man für die Variable successive die beiden verschiedenen Werthe AP, AQ oder x und $x + \delta x$ setzt; woraus nach den Regeln der Differentialrechnung hervorgeht

$$\frac{d^n Y}{dX^n} = \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}}\delta x,$$

und nach der vorigen Gleichung

$$\frac{d^n Y}{dX^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^n \omega}{dx^n} + \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}}\delta x.$$

Bemerkt man überdies, dass $\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}}$ sich von $\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}$ nur um eine unendlich kleine Grösse unterscheidet, so giebt diese Gleichung für die Differenz $\frac{d^n Y}{dX^n} - \frac{d^n y}{dx^n}$ oder $\delta \frac{d^n y}{dx^n}$ den folgenden Werth:

$$(5) \qquad \delta \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \omega}{dx^n} + \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}\delta x,$$

welche Gleichung wir betrachten als die erste einschliessend:

$$\delta y = \omega + \frac{dy}{dx}\delta x.$$

Die Formeln (5) und (4) stimmen überein, wenn man $\delta x = 0$ voraussetzt.

181. Versetzung der Zeichen δ und $\int$. — Betrachten wir jetzt das Integral $\int_{x_1}^{x_2} U$, wo U irgend einen Differentialausdruck bezeichnet, und die Grenzen x_1, x_2 constant oder variabel sind. Man kann es in unendlich viele Elemente zerlegen, von denen das erste x_1 und das letzte dem, um das letzte Differential von x verminderten x_2 entspricht. Es wird also die Grenze sein von einer solchen Summe wie

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_m.$$

Betrachten wir nun das unendlich nahe Integral, in welches das erste übergeht durch die Variation der Grössen, von denen es abhängt, und es sei U' was aus U im Allgemeinen durch diese Veränderung wird, so dass $U' - U = \delta U$. Die Grenzen dieses neuen Integrals werden sein $x_1 + \delta x_1$ und $x_2 + \delta x_2$, und es kann betrachtet werden als die Grenze von

$$U'_1 + U'_2 + U'_3 + \ldots + U'_m,$$

wo diese neuen Elemente einem jeden der ersteren entsprechen.

Das Increment des Integrals ist also die Grenze von

$$(U'_1 - U_1) + (U'_2 - U_2) + \ldots + (U'_m - U_m),$$

oder von

$$\delta U_1 + \delta U_2 + \ldots + \delta U_m,$$

d. h. $\int_{x_1}^{x_2} \delta U$.

Ob man also die Grenzen x_1, x_2 constant oder variabel voraussetzt, so hat man

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} U = \int_{x_1}^{x_2} \delta U; \tag{6}$$

so dass, um die Variation eines bestimmten Integrals zu kennen, man nur diejenige des Differentials zu berechnen und sie zwischen denselben Grenzen zu integriren braucht.

182. Ausdruck für die Variation eines bestimmten Integrals. — Betrachten wir ein Integral von der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx,$$

wo der Werth von V ist

$$V = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)});$$

y bezeichnet eine unbekannte Function von x, und y', y'', ..., $y^{(n)}$ sind die successiven Ableitungen in Bezug auf x. Wir beschränken uns auf die Betrachtung einer einzigen Function y, weil wenn noch mehrere vorhanden wären, es genügen würde für jede das zu wiederholen, was wir für y thun werden. Wir werden zwei verschiedene Fälle untersuchen: denjenigen wo x_1, x_2 gegebene feste Werthe haben, und den anderen wo diese Grenzen nach gewissen gegebenen Bedingungen variiren können.

1. Setzen wir zuerst x_1 und x_2 constant voraus; wir können jetzt $\delta x = 0$ machen und die Formel (4) anwenden, welche für irgend eine Ableitung $y^{(m)}$ giebt

$$\delta y^{(m)} = \frac{d^m \delta y}{dx^m}.$$

Bemerkt man nun, dass die Variation von x oder δx Null ist, und dass folglich die von dx oder $d\delta x$ es auch ist, woraus folgt $\delta(Vdx) = \delta V \,.\, dx$, so giebt die Formel (6)

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta V . dx. \tag{7}$$

Berechnen wir jetzt δV.

Es wird aber, wie wir schon bemerkt haben, das Increment von V durch die gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung gegeben, vermöge der Incremente der Grössen, welche in V variirt haben, d. h. der Grössen y, y', ..., $y^{(n)}$. Man hat also

$$\delta V = \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dy'}\delta y' + \frac{dV}{dy''}\delta y'' + \ldots + \frac{dV}{dy^{(n)}}\delta y^{(n)},$$

was wir der Bequemlichkeit wegen so schreiben werden:

$$\delta V = M\delta y + N\delta y' + P\delta y'' + Q\delta y''' + \ldots + U\delta y^{(n)}.$$

Die Gleichung (7) wird also, indem man $\delta y'$, ..., $\delta y^{(n)}$ vermöge der Formel (4) ausdrückt,

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \Big(M\delta y + N\frac{d\delta y}{dx} + P\frac{d^2\delta y}{dx^2} + Q\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \ldots + U\frac{d^n\delta y}{dx^n}\Big) dx.$$

Wir haben unter dem Zeichen $\int$ die unbestimmte Function δy und ihre Ableitungen nach x; diese letzteren sind bestimmt

durch δy, und es ist nothwendig sie aus dem Integral verschwinden zu machen, indem man sie anf δy allein zurückführt, welches vollkommen willkürlich ist. Man wird dies aber leicht durch die theilweise Integration bewirken.

In der That, wenn man durch u und v zwei Functionen von x bezeichnet, so erhält man leicht durch eine Folge von theilweisen Integrationen die nachstehende, oft in der Analysis nützliche Formel:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\int u\frac{d^n v}{dx^n}dx = u\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} - \frac{du}{dx}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}} \\ &- \frac{d^3u}{dx^3}\frac{d^{n-4}v}{dx^{n-4}} + \ldots \mp \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}v \pm \int \frac{d^n u}{dx^n}v\,dx. \end{aligned}\right.$$

Von dieser Formel Gebrauch machend, erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\int N\frac{d\delta y}{dx}dx = N\delta y - \int \delta y\frac{dN}{dx}dx,$$

$$\int P\frac{d^2\delta y}{dx^2}dx = P\frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP}{dx}\delta y + \int \delta y\frac{d^2P}{dx^2}dx,$$

$$\int Q\frac{d^3\delta y}{dx^3}dx = Q\frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{dQ}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\delta y - \int \delta y\frac{d^3Q}{dx^3}dx,$$

. . . .

$$\begin{aligned}\int U\frac{d^n\delta y}{dx^n}dx = U\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} - \frac{dU}{dx}\frac{d^{n-2}\delta y}{dx^{n-2}} + \frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^{n-3}\delta y}{dx^{n-3}} - \ldots \\ \mp \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}\delta y \pm \int \delta y\frac{d^nU}{dx^n}dx;\end{aligned}$$

und es ist wohl zu bemerken, dass $\frac{dN}{dx}, \ldots, \frac{d^2P}{dx^2}, \ldots$ die totalen Ableitungen von $N, P, \ldots$ repräsentiren, welche Grössen $N, P, \ldots$ als Functionen von x betrachtet werden, in denen man y als von x abhängend ansieht. Man hat also endlich, indem man die Integrale zwischen den Grenzen x_1 und x_2 nimmt,

$$(9)\quad \delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \left\{ \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^{n-1} U}{dx^{n-1}}\right)\delta y \\ &+\left(P - \frac{dQ}{dx} \ldots \mp \frac{d^{n-2} U}{dx^{n-2}}\right)\frac{d\delta y}{dx} \\ &+\left(Q - \frac{dR}{dx} \ldots \pm \frac{d^{n-3} U}{dx^{n-3}}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+U\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} \end{aligned} \right\}_{x_1}^{x_2} \\ &+\int_{x_1}^{x_2}\delta y\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{d^3 Q}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^n U}{dx^n}\right)dx. \end{aligned} \right.$$

Wenn eine zweite Function z in V vorkäme, so würde man zu dem zweiten Gliede dieser Gleichung einen anderen Ausdruck addiren, welcher sich davon nur durch die Werthe der Functionen unterscheiden würde, welche an die Stelle von $M, N, P, \ldots$ zu stehen kämen, und durch die Vertauschung von y mit z. Ebenso würde es sein für irgend eine Anzahl von Functionen.

183. Wenn die Function V die auf die Grenzen bezüglichen Werthe von $y, y', \ldots$ enthielte, so würde zu den Ausdrücken, welche wir für die Variation des Integrals berechnet haben, noch hinzukommen:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dy'_1}\delta y'_1 + \ldots + \frac{dV}{dy_2}\delta y_2 + \frac{dV}{dy'_2}\delta y'_2 + \ldots\right)dx.$$

Da aber die Grössen $\delta y_1, \delta y'_1, \ldots, \delta y_2, \delta y'_2, \ldots$ keine Functionen von x sind, so könnte man sie vor das Zeichen $\int$ bringen, und die zu addirenden Glieder würden sich reduciren auf

$$(10)\quad \delta y_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dy_1}dx + \delta y'_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dy'_1}dx + \ldots + \delta y_2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dy_2}dx + \ldots$$

2. Setzen wir nun voraus, dass x_1, x_2 variabel seien, und dass δx nicht Null sei. Man hat in diesem Falle

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2}\delta(V dx) = \int_{x_1}^{x_2}(\delta V \cdot dx + V d\delta x).$$

Da die theilweise Integration giebt

$$\int V d\delta x = V\delta x - \int \delta x \,.\, dV,$$

so wird die vorige Gleichung

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (\delta V \,.\, dx - dV \,.\, \delta x).$$

Es sei jetzt

$$dV = Ldx + Mdy + Ndy' + Pdy'' + Qdy''' + \ldots$$

und folglich

$$\delta V = L\delta x + M\delta y + N\delta y' + P\delta y'' + Q\delta y''' + \ldots;$$

hieraus geht hervor

$$\delta V.dx - dV.\delta x = dx\left[M\left(\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x\right) + N\left(\delta y' - \frac{dy'}{dx}\delta x\right) + \ldots\right],$$

oder zufolge der Formel (5)

$$\delta V.dx - dV.\delta x = dx\left(M\omega + N\frac{d\omega}{dx} + P\frac{d^2\omega}{dx^2} + Q\frac{d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right).$$

Man hat also zum Ausdruck der gesuchten Variation

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(M\omega + N\frac{d\omega}{dx} + P\frac{d^2\omega}{dx^2} + Q\frac{d^3\omega}{dx^3} + \ldots\right) dx.$$

Man kann bemerken, dass dieser Ausdruck sich von demjenigen des vorigen Falles nur durch die Addition des Gliedes $\left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2}$ unterscheidet; denn ω bezeichnet hier was δy dort bezeichnete. Wenn man daher in gleicher Weise die theilweise Integration anwendet, so wird man alle an ω haftenden Differentiationsindices unter dem Zeichen $\int$ verschwinden machen, und man wird finden:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = & \left| \begin{aligned} & V\delta x + \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} \ldots\right)\omega \\ & \quad + \left(P - \frac{dQ}{dx} \ldots\right)\frac{d\omega}{dx} \\ & \quad + \left(Q - \frac{dR}{dx} \ldots\right)\frac{d^2\omega}{dx^2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad + U\frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}} \end{aligned} \right|_{x_1}^{x_2} \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \omega\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{d^3 Q}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^n U}{dx^n}\right) dx. \end{aligned} \right.$$

Wenn in V eine zweite unbekannte Function z vorkäme, so würde dV noch einen Theil enthalten von der Form $M'dz + N'dz' + P'dz'' + \dots$ Man würde setzen

$$\delta z - z'\delta x = \omega',$$

und würde zu dem vorstehenden Ausdruck einen zweiten addiren, in welchem ω' in derselben Weise wie in jenem ω vorkäme; das Glied $V\delta x$ würde nur einmal vorkommen. Ebenso würde es sein bei jeder Anzahl Functionen.

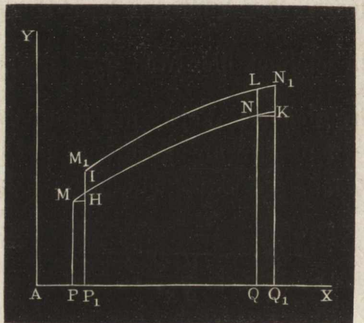
Endlich, wenn V die auf die Grenzen bezüglichen Werthe von $x, y, z, \dots, y', z', \dots$ enthielte, so würde man die folgenden Glieder hinzuaddiren:

$$(12)\quad \delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx_1} dx + \delta y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} dx + \dots + \delta x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx_2} dx + \dots$$

184. Der Fall wo x_1, x_2 variabel sind, kann unmittelbar auf jenen zurückgeführt werden, wo sie fest sind, ohne Gebrauch zu machen von der Formel (5).

In der That, betrachten wir V als die Ordinate einer Curve MN, und es sei $AP = x_1$, $AQ = x_2$; man hat

Fig. 4.



$$\int_{x_1}^{x_2} V dx = PMNQ.$$

Es sei jetzt $M_1 N_1$ die Curve nach der Variation; der Werth des vorgelegten Integrals wird, in dem zweiten System, die Fläche $P_1 M_1 N_1 Q_1$ sein: man kann daher, indem man die unendlich Kleinen der zweiten Ordnung vernachlässigt, die Variation des Integrals betrachten als gleich mit

$$NQQ_1K - MPP_1H + M_1LNJ.$$

Die beiden ersten Glieder repräsentiren

$$V_2\delta x_2 - V_1\delta x_1, \text{ oder } \Big(V\delta x\Big)_{x_1}^{x_2}.$$

Das dritte ist das Integral $\int \delta V . dx$ genommen zwischen den Grenzen $x_1 + \delta x_1$ und x_2, oder, mit Vernachlässigung eines

unendlich Kleinen der zweiten Ordnung, zwischen x_1 und x_2. Daher endlich

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta V . dx,$$

wo δV die Variation von V in der Voraussetzung $\delta x = 0$ ist und folglich dieselbe Bedeutung hat wie in dem ersten Falle. Ihr Ausdruck ist also derselbe; nur wird es angemessen sein, die Variation von y anders als durch δy darzustellen, was in dem gegenwärtigen Falle eine andere Bedeutung haben würde, und wir werden durch ω die Variation von y in der Voraussetzung $\delta x = 0$ bezeichnen. Es genügt also, um die gesuchte Variation des Integrals $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ zu erhalten, dass man $\left(V\delta x\right)_{x_1}^{x_2}$ zu dem zweiten Gliede der Gleichung (9) addirt, worin man δy durch ω ersetzt.

Man kommt so auf die Formel (11) zurück, wie dies sein musste. Man würde ebenso den Ausdruck (12) hinzufügen, wenn V die Werthe der Variablen an den Grenzen explicit enthielte.

185. Es bleibt uns übrig den Fall zu untersuchen, wo die unabhängige Variable nicht bezeichnet ist, und wo folglich die Function unter dem Zeichen $\int$ nicht Ableitungen in Bezug auf x, sondern Differentiale enthält, welche genommen sind in Bezug auf eine willkürliche Variable, die nicht in der Aufgabe vorkommt und durchaus nicht bezeichnet ist. Es sei also vorgelegt, $\delta\int_{x_1}^{x_2} U$ zu finden, unter der Voraussetzung

$$U = F(x, dx, d^2x, \ldots, y, dy, d^2y, \ldots).$$

Die Grenzen x_1 und x_2 seien fest oder variabel, man hat immer, wie wir zeigten,

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} U = \int_{x_1}^{x_2} \delta U,$$

und für irgend eine Variable u

$$\delta d^n u = d^n \delta u.$$

Dies vorausgesetzt, bezeichnen wir durch $L, M, N, P, \ldots$ die partiellen Ableitungen von U in Bezug auf die Grössen x, dx,

$d^2x, d^3x, \ldots$, und durch $L', M', N', P', \ldots$ seine partiellen Ableitungen in Bezug auf $y, dy, d^2y, d^3y, \ldots$, so kann man δU in folgender Weise ausdrücken:

$$\delta U = L\delta x + M\delta dx + N\delta d^2x + P\delta d^3x + \ldots$$
$$+ L'\delta y + M'\delta dy + N'\delta d^2y + P'\delta d^3y + \ldots.$$

Wir brauchen kaum darauf aufmerksam zu machen, dass die verschiedenen Grössen $L, M, \ldots, L', M', \ldots$ nicht von derselben infinitesimalen Ordnung sind, und dass der zweite Factor eines jeden Gliedes die Homogenität herstellt. Indem man die beiden Glieder dieser Gleichung integrirt und alle Variationen der Differentiale vor das Zeichen $\int$ bringt vermöge der theilweisen Integration, erhält man den folgenden Werth von $\delta\int_{x_1}^{x_2} U$:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\int_{x_1}^{x_2} U = &\left\{\begin{array}{r|l|l|l} M & \delta x + N & d\delta x + P & d^2\delta x + \ldots \\ -dN & \quad -dP & \quad \ldots & \\ +d^2P & \quad \ldots & & \\ \ldots & & & \\ + M' & \delta y + N' & d\delta y + P & d^2\delta y + \ldots \\ -dN' & \quad -dP' & \quad \ldots & \\ +d^2P' & \quad \ldots & & \\ \ldots & & & \end{array}\right\}_{x_1}^{x_2} \\ &+\int_{x_1}^{x_2} \delta x\,(L - dM + d^2N - d^3P + \ldots) \\ &+\int_{x_1}^{x_2} \delta y\,(L' - dM' + d^2N' - d^3P' + \ldots). \end{aligned}\right.$$

Wenn man in U andere Functionen als x und y hätte, so würde man Ausdrücke hinzuaddiren, welche ähnlich wären einem von denen, welche sich auf x und y in dieser Formel beziehen. Wie in den vorhergehenden Fällen würde man verfahren, wenn U die Werthe der Variablen an den Grenzen explicit enthielte.

Bestimmung der unbekannten Functionen.

186. Die Bedingung dafür, dass ein bestimmtes Integral ein Maximum sei, besteht darin, dass welches Zeichen man auch

für die unendlich kleinen Variationen δx, δy, δz, ... annimmt, die Variation dieses Integrals beständig negativ ist; die Bedingung des Minimums dagegen ist, dass diese Variation immer positiv sei; und in beiden Fällen muss sie von constantem Zeichen sein. Es muss daher der Theil dieser Variation, in welchem nur die ersten Potenzen der Grössen δx, δy, ... vorkommen, Null sein, und diese Bedingung ist dem Maximum und Minimum gemeinschaftlich. Man wird beide von einander unterscheiden durch das Zeichen der Gesammtheit der Glieder des zweiten Grades, welches Zeichen constant sein muss.

Wir werden den allgemeinen Fall betrachten, wo x_1, x_2 variabel sind, und wir setzen die Ableitungen genommen in Bezug auf x voraus, was immer möglich ist. Dann wird der Ausdruck der Variation des Integrals $\int_{x_1}^{x_2} V dx$, indem man sich auf die Glieder der ersten Ordnung beschränkt und voraussetzt, dass V nur eine Function y enthalte, gegeben durch die Formel (11). Man muss also das zweite Glied dieser Gleichung gleich Null setzen, um die sowohl für das Minimum als für das Maximum des Integrals nothwendige Bedingung zu haben.

Aber die Summe der Glieder ausser dem Zeichen $\int$ muss Null sein, und auch das Integral muss für sich Null sein; denn ohne dies würde, wenn man die auf die Grenzen bezüglichen unabhängigen Variationen willkürlich fixirte, unter dem Zeichen $\int$ noch die willkürliche Function ω bleiben, und dieses bestimmte Integral könnte nicht denselben Werth behalten, was auch diese Function wäre; das zweite Glied der Gleichung (11) würde also nicht beständig Null sein.

Ueberdies kann dieses Integral

$\int_{x_1}^{x_2} \omega dx \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \dots\right)$ nicht Null sein, was auch die Function ω sei, wenn nicht die Grösse, welche sie unter dem Zeichen $\int$ multiplicirt, Null ist. In der That, da ω unbestimmt ist für alle Werthe von x zwischen x_1 und x_2, so kann es immer von demselben Zeichen genommen werden wie

der zweite Factor; alle Elemente des Integrals würden also positiv sein, und ihre Summe könnte nicht Null sein. Dass ω gewissen Bedingungen unterworfen wäre für die Werthe x_1 oder x_2, würde übrigens gleichgültig sein, weil zwei Elemente keinen Einfluss haben auf ein Integral. Man muss also die Gleichung haben:

$$(14) \qquad M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{d^3 Q}{dx^3} + \ldots \mp \frac{d^n U}{dx^n} = 0 .$$

Diese Differentialgleichung ist im Allgemeinen von der Ordnung $2n$, denn V enthält $y^{(n)}$, und folglich kann U es enthalten. Sie ist nothwendig aber nicht hinreichend, damit das Integral $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ ein Maximum oder Minimum sei. Sie enthält die Grössen $x, y, y', y'', \ldots$, und lässt y als Function von x und $2n$ willkürlichen Constanten finden.

Ferner müssen auch die Glieder ausserhalb des Zeichens $\int$ in der Gleichung (11) Null werden. Die daraus hervorgehenden sogenannten Grenzgleichungen werden zur Bestimmung der Integrationsconstanten und der extremen Werthe von x dienen.

187. Wenn man mehrere Functionen $y, z, \ldots$ hätte, so würde man denselben Gang befolgen. Das Integral, welches in der Variation vorkommt, muss wieder Null sein, unabhängig von den integrirten Ausdrücken. Es würde, wie wir sahen, mehrere Functionen $\omega, \omega', \ldots$ enthalten, deren Werthe sind

$$\omega = \delta y - y' \delta x, \qquad \omega' = \delta z - z' \delta x, \ldots .$$

Diese willkürlichen Functionen würden unabhängig sein, weil in jede von ihnen eine neue willkürliche Variation eingeht. Es müssten also die Grössen, welche jede von ihnen multipliciren, einzeln Null sein, was ebenso viel simultane Differentialgleichungen liefern würde, als Functionen zu bestimmen sind.

Sie würden von der Form sein

$$(15) \qquad \begin{cases} M - \dfrac{dN}{dx} + \dfrac{d^2 P}{dx^2} - \dfrac{d^3 Q}{dx^3} + \ldots = 0, \\ M' - \dfrac{dN'}{dx} + \dfrac{d^2 P'}{dx^2} - \dfrac{d^3 Q'}{dx^3} + \ldots = 0, \end{cases}$$

wo $M', N', \ldots$ in Bezug auf z vorstellen, was $M, N, \ldots$ in Bezug auf y vorstellen.

Die Constanten würden sich wieder durch die auf die Grenzen bezüglichen Bedingungen bestimmen.

188. Wenn die Functionen y, z einer Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zu genügen hätten, so müssten die Variationen δx, δy, δz der folgenden genügen

$$\text{(a)} \qquad \frac{dF}{dx}\,\delta x + \frac{dF}{dy}\,\delta y + \frac{dF}{dz}\,\delta z = 0.$$

Man könnte hieraus δz als Function von δx, δy ziehen, und es substituiren in dem Ausdruck der Variation des Integrals; man würde dann eine unbestimmte Function weniger unter dem Zeichen $\int$ haben, und folglich auch eine Gleichung weniger, welche ersetzt wäre durch $F(x, y, z) = 0$.

In der That, die Grösse unter dem Zeichen $\int$, welche gleich Null gesetzt werden muss, ist von der Form

$$A\omega + A'\omega',$$

und die Gleichung (a) wird, indem man δy und δz durch ihre Werthe ersetzt,

$$\frac{dF}{dx}\,\delta x + \frac{dF}{dy}\,(y'\,\delta x + \omega) + \frac{dF}{dz}\,(z'\,\delta x + \omega') = 0.$$

Der Coëfficient von δx in dieser Gleichung ist Null, weil man, die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ differentiirend, findet

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\,y' + \frac{dF}{dz}\,z' = 0;$$

es bleibt also nur

$$\omega\,\frac{dF}{dy} + \omega'\frac{dF}{dz} = 0.$$

Indem man hieraus ω' zieht und es in dem Ausdruck $A\omega + A'\omega'$ substituirt, welcher gleich Null gesetzt werden muss, erhält man

$$\omega\left(A - A'\,\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\right),$$

und da diese Grösse Null sein muss, was auch die Function ω sei, so muss man nothwendig setzen

$$A - A' \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}} = 0 .$$

Man hat also zwischen y und z die beiden Gleichungen

(16) $$A \frac{dF}{dz} = A' \frac{dF}{dy} ,$$

und

$$F(x, y, z) = 0,$$

woraus man y und z als Functionen von x wird finden können

189. Eine andere Art der Bedingung. — Statt die Werthe von x, y, z einer Gleichung von bestimmter Form zu unterwerfen, verlangt man oft, dass ein gewisses bestimmtes Integral einen constanten Werth behalte: man hat dann was man ein relatives Maximum oder Minimum nennt.

Es sei also $\int_{x_1}^{x_2} U dx = a$, und stellen wir uns die Aufgabe das Maximum oder Minimum von $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ zu finden. Die Variationen dieser beiden Integrale müssen Null sein; und, indem man zuerst die Grenzen fest voraussetzt, wird man zu den beiden Gleichungen gelangen

$$(\alpha) \int_{x_1}^{x_2} u \omega \, dx = 0 , \qquad (\beta) \int_{x_1}^{x_2} v \omega \, dx = 0 ;$$

und der zweiten soll genügt werden, wenn man darin für ω irgend eine der ersten genügende Function setzt; u und v sind durch U und V vermöge einer früheren Formel bestimmt; und ω bezeichnet noch $\delta y - y' \delta x$. Man sieht sogleich, dass diese Bedingung erfüllt sein würde, wenn u und v sich nur um einen constanten Factor unterschieden, und wir werden zeigen, dass dies nicht anders sein kann.

Setzen wir mit Cauchy

$$\int_{x_1}^{x} u \omega \, dx = \varphi (x),$$

so ist diese Function $\varphi (x)$, zufolge der Gleichung (α), nur der Bedingung $\varphi (x_2) = 0$ unterworfen; man hat ausserdem offen-

bar $\varphi(x_1) = 0$, aber $\varphi(x)$ ist vollkommen willkürlich zwischen x_1 und x_2. Man hat unmittelbar

$$u\omega = \varphi'(x), \text{ daher } \omega = \frac{\varphi'(x)}{u}.$$

Diesen Werth in der Gleichung (β) substituirend, erhält man

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{v}{u} \varphi'(x)\, dx = 0.$$

Um dahinein statt $\varphi'(x)$ die Function $\varphi(x)$, deren Bedingungen bekannt sind, einzuführen, integriren wir theilweise; wir finden, durch $\left(\frac{v}{u}\right)'$ die Ableitung von $\frac{v}{u}$ bezeichnend,

$$\int \frac{v}{u} \varphi'(x)\, dx = \frac{v}{u} \varphi(x) - \int \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx;$$

indem wir zu Grenzen dieser Integrale x_1 und x_2 nehmen, und bemerken dass $\varphi(x)$ Null wird an diesen Grenzen, kommt

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{v}{u}\right) \varphi'(x)\, dx = - \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx,$$

und folglich

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx = 0.$$

Da diese Gleichung stattfinden muss, was auch $\varphi(x)$ sei, so folgert man daraus nothwendig $\left(\frac{v}{u}\right)' = 0$, und folglich

$$\frac{v}{u} = \alpha, \text{ oder } v = \alpha u,$$

wo α eine unbekannte Constante bezeichnet.

Dies ist also die Differentialgleichung, welche die Function y bestimmt. Wenn ihr Werth gefunden ist, und wenn die bei der Integration eingehenden Constanten durch die Bedingungen der Grenzen bestimmt sind, so substituirt man ihn in der Gleichung $\int_{x_1}^{x_2} U dx = a$, welche den Werth der Constante α ergeben wird.

Es ist leicht zu sehen, dass man zu demselben Resultate gelangen würde, indem man das absolute Maximum von

$\int_{x_1}^{x_2}(V - \alpha U)\,dx$ suchte und die Constante α, wie wir dies eben angegeben haben, bestimmte. Dies ist die schon von Euler gegebene Regel.

Nehmen wir jetzt an, dass die Grenzen x_1, x_2 nicht fest seien, so werden die Gleichungen (α), (β) durch die beiden folgenden ersetzt werden

$$(\gamma)\quad \psi_2 - \psi_1 + \int_{x_1}^{x_2} u\,\omega\,dx = 0, \qquad (\delta)\quad \chi_2 - \chi_1 + \int_{x_1}^{x_2} v\,\omega\,dx = 0,$$

wo ψ und χ Ausdrücke ausserhalb des Integralzeichens bezeichnen, welche ψ_1 und χ_1 an der ersten Grenze werden, und ψ_2, χ_2 an der zweiten.

Der Gleichung (δ) soll genügt werden, wenn man für ω irgend eine solche Function setzt, dass die Gleichung (γ) stattfindet, auf welche Weise dies auch geschehe; also ist ω nur der Bedingung unterworfen, dass $\int_{x_1}^{x_2} u\,\omega\,dx$ gleich $\psi_1 - \psi_2$ sei; und es wird verlangt, dass die Gleichung (δ) stattfinde für alle Werthe von ω, welche dieser Bedingung genügen. Dies muss die unbekannte Function y bestimmen.

Setzen wir wieder $\int_{x_1}^{x} u\,\omega\,dx = \varphi(x)$, so hat man $\varphi(x_1) = 0$, und zufolge der Gleichung (γ)

$$\varphi(x_2) = \psi_1 - \psi_2,$$

und $\varphi(x)$ ist keiner anderen Bedingung unterworfen.

Setzt man in der Gleichung (δ) für ω seinen Werth $\frac{\varphi'(x)}{u}$, so kommt

$$\chi_2 - \chi_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{v}{u}\,\varphi'(x)\,dx = 0.$$

Um anstatt $\varphi'(x)$ die Function $\varphi(x)$ einzuführen, deren Bedingungen bekannt sind, integriren wir theilweise; die vorstehende Gleichung wird, mit Rücksicht auf die Werthe von $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_2)$,

$$(\varepsilon)\quad \chi_2 - \chi_1 - \left(\frac{v}{u}\right)_2 (\psi_2 - \psi_1) - \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \left(\frac{v}{u}\right)' dx = 0;$$

und da $\varphi(x)$ vollkommen willkürlich ist zwischen x_1 und x_2, so muss dieses letzte Integral Null sein, sowie der übrige Theil des ersten Gliedes. Man hat also wieder

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = 0\,,\quad \text{oder}\quad v = \alpha u\,,$$

wo α eine Constante bezeichnet. Indem man $\left(\frac{v}{u}\right)_2$ durch α in dem ersten Theile der Gleichung (ε) ersetzt, hat man

$$\chi_2 - \chi_1 - \alpha\,(\psi_2 - \psi_1) = 0\,.$$

Die bei der Integration eingehenden Constanten werden sich durch die auf die Grenzen bezüglichen Bedingungen bestimmen, und die Constante α durch die Gleichung $\int_{x_1}^{x_2} U dx = a$.

Man sieht auch hier, dass man zu denselben Resultaten gelangen würde, indem man das absolute Maximum oder Minimum von $\int_{x_1}^{x_2} (V - \alpha\, U)\, dx$ suchte, wo α eine unbestimmte Constante bezeichnet.

In einer analogen Weise würde man den Fall behandeln, wo man mehrere unbekannte Functionen, oder mehrere bestimmte Integrale mit constanten Werthen hätte.

190. Betrachten wir jetzt den Fall, wo das Integral von der Form $\int_{x_1}^{x_2} U$ ist, während U nur Differentiale enthält, welche in Bezug auf eine willkürliche Variable genommen sind. Die Variation dieses Integrals wird jetzt durch die Formel (13) gegeben, und aus denselben Gründen wie in dem ersten Falle muss man getrennt gleich Null setzen den Theil, der von dem Zeichen $\int$ frei ist, und denjenigen, welcher sich aus allen Integralen zusammensetzt, die in gleicher Anzahl sind wie die Variablen $x, y, z, \ldots$.

Nun sind die Functionen δx, δy, $\delta z, \ldots$ völlig unabhängig von einander; also muss jedes Integral einzeln Null sein, was zu den folgenden Gleichungen führt:

$$(17)\quad \begin{cases} L\ -dM\ +d^2N\ -d^3P\ +\ldots=0, \\ L'-dM'+d^2N'-d^3P'+\ldots=0, \\ L''-dM''+d^2N''-d^3P''+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Man hat somit ebenso viele Gleichungen als Variablen x, y, z, ...; und da eine unter ihnen unbestimmt bleiben muss, so muss offenbar eine dieser Gleichungen in den anderen stecken. Wir beschränken uns auf diese Bemerkung, und fügen hinzu dass man hier einen Vortheil hat, welchen die Rechnung des ersten Falles nicht darbot und welcher darin besteht, dass man das System von Gleichungen am vortheilhaftesten wählen kann, indem man die am wenigsten einfache Gleichung zur Seite lässt. Wenn man y, z, ... als Functionen von x gefunden hat, so werden sich die durch die Integration eingeführten Constanten, wie in dem ersten Falle, vermöge der Gleichungen bestimmen, welche sich auf die Grenzen beziehen.

191. Die Integration der Gleichungen (17) wird einfacher, wenn U kein x, oder eine der anderen Functionen nicht enthält; denn, da dann der erste Summand einer dieser Gleichungen Null ist, und alle anderen vollständige Differentiale sind, so hat man unmittelbar ein erstes Integral dieser Gleichung Wenn mehrere der Variablen x, y, ... zugleich in U fehlen, so ist eine gleiche Anzahl der Gleichungen (16) integrabel.

192. Die Gleichungen (15) bieten dieselbe Vereinfachung dar, wenn y oder z nicht in V vorkommt; aber wenn x darin fehlt, so sind einige Transformationen nöthig, um die Vereinfachung zu erhalten, welche uns die Gleichungen (17) unmittelbar dargeboten haben.

In der That, setzt man der Einfachheit wegen voraus, dass es nur eine unbekannte Function y gebe, so ist die Bedingung des Maximums oder Minimums

$$(\text{a})\qquad M-\frac{dN}{dx}+\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{d^3Q}{dx^3}+\ldots=0,$$

und man hat, indem man berücksichtigt dass V kein x enthält,

$$\frac{dV}{dx}=My'+Ny''+Py'''+Qy^{IV}+\ldots.$$

Zieht man von dieser Gleichung die mit y' multiplicirte vorige ab, so kommt

$$\frac{dV}{dx} = \left(Ny'' + y'\frac{dN}{dx}\right) + \left(Py''' - y'\frac{d^2P}{dx^2}\right)$$
$$+ \left(Qy^{IV} + y'\frac{d^3Q}{dx^3}\right) + \ldots .$$

Es ist nun leicht zu sehen, das das zweite Glied dieser Gleichung eine vollständige Ableitung ist.

Hierzu bemerken wir allgemein, dass wenn u und v beliebige Functionen von x bezeichnen, ein Ausdruck von der Form

$$u\,d^n v - v\,d^n u$$

ein vollständiges Differential ist, wenn n gerade, und dass

$$u\,d^n v + v\,d^n u$$

ein solches ist, wenn n ungerade. Es folgt hieraus, dass alle Binome, welche das zweite Glied der letzten Gleichung bilden, vollständige Ableitungen sind, und dass man folglich die beiden Glieder dieser Gleichung integriren kann; was zu einer Gleichung von niedrigerer Ordnung führen wird.

Setzen wir z. B. voraus, dass V nur y, y' und y'' enthalte. Die letzte Gleichung wird

$$\frac{dV}{dx} = \left(Ny'' + y'\frac{dN}{dx}\right) + \left(Py''' - y'\frac{d^2P}{dx^2}\right);$$

woraus durch Integriren

(b) $$V = Ny' + Py'' - y'\frac{dP}{dx} + C,$$

eine Gleichung dritter Ordnung, während die Gleichung (a) von der vierten war. Wäre zu gleicher Zeit V unabhängig von y, so hätte man $M = 0$; die Gleichung (a) würde integrabel sein und geben

$$N - \frac{dP}{dx} = C'.$$

Zwischen dieser und der vorigen Gleichung $\frac{dP}{dx}$ eliminirend, würde man finden

$$V = Py'' + C'y' + C,$$

wo C und C' zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Diese Gleichung ist nur noch von der zweiten Ordnung. So kann man, wenn V nur y', y'' enthält, ein zweites Integral der Glei-

chung (a) erhalten, und die Rechnung auf die Integration einer Gleichung der zweiten Ordnung zurückführen.

Wenn V eine zweite Function z und ihre Ableitungen z' und z'' enthielte, so würde man ebenso erhalten

$$(c) \qquad V = Ny' + Py'' - y'\frac{dP}{dx} + N'z' + P'z'' - z'\frac{dP'}{dx} + C.$$

Der besondere Fall, wo man nur die Differentiale der ersten Ordnung betrachtet.

193. Wenden wir unsere Theorie an auf den einfachen Fall, wo die Function V drei Variablen x, y, z und nur die ersten Ableitungen von y und z enthält.

Das vorgelegte Integral sei

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z, y', z')\,dx,$$

also

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx = 0.$$

1. Wenn keine allgemeine Gleichung zwischen x, y, z existirt, so wird man von den Formeln (15) Gebrauch machen, und man hat

$$(18) \qquad M - \frac{dN}{dx} = 0, \quad M' - \frac{dN'}{dx} = 0,$$

wo

$$\frac{df}{dy} = M, \quad \frac{df}{dy'} = N, \quad \frac{df}{dz} = M', \quad \frac{df}{dz'} = N'.$$

Diese beiden simultanen Gleichungen von der zweiten Ordnung werden y und z als Functionen von x und vier willkürlichen Constanten ergeben.

Wenn die beiden Grenzen unabhängig sind, so hat man für jede

$$(19) \qquad (V - Ny' - N'z')\,\delta x + N\,\delta y + N'\,\delta z = 0.$$

Wenn für eine von ihnen keine Bedingung besteht, so müssen, da δx, δy, δz unabhängig sind, ihre Coëfficienten einzeln Null sein, was drei Gleichungen zwischen den auf diese Grenze be-

züglichen Werthen von x, y, z, y', z' liefert. Wenn dagegen an dieser nämlichen Grenze x, y, z einer gegebenen Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ genügen müssten, so würde man haben

$$\frac{d\varphi}{dx}\,\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\,\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\,\delta z = 0.$$

Indem man δz zwischen dieser und der Gleichung (19) eliminirte, würden nur die Unbestimmten δx, δy übrig bleiben, deren Coëfficienten man einzeln gleich Null setzen würde. Man hätte also wieder drei Gleichungen zwischen den auf diese Grenze bezüglichen Werthen von x, y, z, x', y'. Man würde in derselben Weise verfahren, wenn man eine zweite Gleichung hätte.

Gegenwärtig ist es leicht die durch die Integration eingeführten willkürlichen Constanten zu bestimmen; denn die zwischen x, y, z und diesen vier Constanten erhaltenen Gleichungen müssen erfüllt werden durch x_1, y_1, z_1 und durch x_2, y_2, z_2, woraus zwei Gleichungen für jede Grenze resultiren. Also hat man für jede Grenze fünf Gleichungen zwischen den Werthen von x, y, z, welche sich darauf beziehen, und den vier Constanten; man kann daher diese Constanten und die auf die Grenzen bezüglichen Werthe von x, y, z bestimmen.

2. Wenn die Variablen x, y, z gehalten sind einer Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zu genügen, so muss man von der Formel (16) Gebrauch machen, welche in diesem Falle wird

$$(20) \qquad \left(M - \frac{dN}{dx}\right)\frac{dF}{dz} = \left(M' - \frac{dN'}{dx}\right)\frac{dF}{dy}.$$

Indem man z vermöge der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ eliminirt, erhält man eine Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x und y. Diese integrirend findet man y, und folglich z, als Function von x und zwei willkürlichen Constanten.

Die Werthe von x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 bestimmen sich wie in dem vorigen Falle, indem man berücksichtigt, dass sie der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügen müssen. Man hat jetzt vier Gleichungen für jede Grenze. Die beiden willkürlichen Constanten bestimmen sich aus diesen Gleichungen, sowie die auf die Grenzen bezüglichen Werthe von x, y, z.

Anwendung auf einige besondere Probleme.

194. Linie von der kürzesten Länge. — Betrachten wir zuerst den Fall, wo man keine allgemeine Bedingung giebt zwischen den Coordinaten der verschiedenen Punkte dieser Linie, d. h. wo sie nicht genöthigt ist auf einer gegebenen Oberfläche zu liegen.

Das Integral, welches ein Minimum werden soll, ist

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

man hat also

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{ds}{dx}, \quad M = 0, \quad M' = 0,$$

$$N = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dy}{ds}, \quad N' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \frac{dz}{ds}.$$

Die Gleichungen (18) werden

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dN'}{dx} = 0;$$

N und N' sind also constant, und folglich y' und z'.

Es sei

$$y' = C, \qquad z' = C',$$

daraus folgt

$$y = Cx + d, \qquad z = C'x + d'.$$

Also, was auch die auf die Grenzen bezüglichen Bedingungen seien, man findet, wie zu erwarten war, eine gerade Linie.

Die Gleichung (19), welche für jeden Endpunkt stattfinden muss, wird

$$\text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x + y' \delta y + z' \delta z = 0, \\ \text{oder} \\ dx\, \delta x + dy\, \delta y + dz\, \delta z = 0. \end{array} \right.$$

Es sind aber drei Fälle für jeden Endpunkt zu untersuchen:

1. Wenn das Ende (x_1, y_1, z_1) fest ist, so hat man

$$\delta x_1 = 0, \quad \delta y_1 = 0, \quad \delta z_1 = 0;$$

seine Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind gegeben, und die Constanten C, C', d, d' müssen den beiden Bedingungen genügen

$$y_1 = Cx_1 + d, \quad z_1 = C'x_1 + d'.$$

2. Wenn dieser Endpunkt einer Gleichung $F(x,y,z) = 0$ genügt, so hat man

$$\frac{dF}{dx}\,\delta x_1 + \frac{dF}{dy}\,\delta y_1 + \frac{dF}{dz}\,\delta z_1 = 0.$$

Indem man δz_1 zwischen der Gleichung (a) und dieser eliminirt, und darauf die Coëfficienten von δx_1 und δy_1 gleich Null setzt, erhält man

$$\frac{dF}{dz} = z'\frac{dF}{dx}, \quad y'\frac{dF}{dz} = z'\frac{dF}{dy}, \text{ woraus } \frac{dF}{dy} = y'\frac{dF}{dx},$$

oder

$$\frac{dF}{dz} = C'\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} = C\frac{dF}{dx},$$

in welchen Gleichungen x, y, z zu ersetzen sind durch x_1, y_1, z_1.

Diese zwei Gleichungen sind zu verbinden mit $F(x_1, y_1, z_1) = 0$ und mit den beiden folgenden

$$y_1 = Cx_1 + d, \quad z_1 = C'x_1 + d'.$$

Man hat so fünf Gleichungen zwischen x_1, y_1, z_1 und den vier Constanten.

3. Wenn man zwei Gleichungen zwischen x_1, y_1, z_1 gäbe, so würde man ebenso zu fünf Gleichungen zwischen ihnen und den Constanten gelangen.

Somit findet man für jedes Ende, sei es frei oder einer oder zwei Bedingungen unterworfen, immer zwei Gleichungen zwischen den Constanten, entweder direct oder durch die Elimination von x_1, y_1, z_1. Also können die vier Constanten immer bestimmt werden durch die auf die beiden Grenzen bezüglichen Bedingungen.

195. Die Gleichung (a) enthält eine bemerkenswerthe geometrische Eigenschaft der kürzesten Linie. In der That, sie drückt aus, dass die Richtung, welche mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus proportional sind mit dx, dy, dz, senkrecht ist zu derjenigen, deren Cosinus proportional sind mit δx, δy, δz. Woraus hervorgeht, dass die Tangente an der gesuchten Linie, welche durch irgend einen ihrer Endpunkte geführt ist, senkrecht steht auf allen Richtungen, nach welchen dieser Endpunkt sich bewegen kann. Sie ist also normal zu

der Curve oder Oberfläche, auf welcher dieser Endpunkt bleiben muss, wenn er nicht fest von Lage ist.

196. Nehmen wir jetzt an, dass die gesuchte Linie genöthigt sei, auf einer gegebenen Oberfläche zu liegen von der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0;$$

in diesem Falle muss man der Gleichung (20) genügen, welche sich reducirt auf

$$\frac{dF}{dz}\frac{dN}{dx} = \frac{dF}{dy}\frac{dN'}{dx}, \text{ oder } \frac{dF}{dz}d.\frac{dy}{ds} = \frac{dF}{dy}d.\frac{dz}{ds}.$$

Diese Gleichung zweiter Ordnung, in Verbindung mit der vorstehenden, liefert y und z als Functionen von x und zwei willkürlichen Constanten.

Die Gleichung (19) findet für jede Grenze statt und zeigt wieder, wenn die Grenzen nicht fest sind, dass die gesuchte Curve senkrecht ist zu den Curven, nach welchen sie sich auf der gegebenen Oberfläche bewegen können. In dem einen und anderen Falle bestimmen sich die Constanten durch die schon angegebenen Mittel.

197. Die Gleichung $\frac{dF}{dz}\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dF}{dy}\frac{d^2z}{ds^2}$ lässt eine bemerkenswerthe Eigenschaft der kürzesten Linie erkennen. In der That, die Gerade welche irgend einen Punkt derselben mit dem Krümmungsmittelpunkt verbindet, macht mit den Axen Winkel, deren Cosinus proportional sind mit $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$; und die auf die Normale zur Oberfläche bezüglichen Cosinus sind proportional mit $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$. Die vorstehende Gleichung giebt aber

$$(b) \qquad \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\frac{dF}{dz}},$$

und es ist leicht zu sehen, dass diese Verhältnisse gleich sind mit $\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dF}{dx}}$; denn die Symmetrie der Gegebenen in Bezug auf

x, y, z zeigt, dass man, die Rechnung anders richtend, dieses letzte Verhältniss gleich einem der beiden anderen gefunden hätte.

Uebrigens kann man dies leicht verificiren.

In der That, die Gleichungen (b) geben

$$\frac{\frac{d^2 y}{ds^2}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{\frac{d^2 z}{ds^2}}{\frac{dF}{dz}} = \frac{\frac{d^2 y}{ds^2}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2 z}{ds^2}\frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds}} = \frac{\frac{d^2 x}{ds^2}}{\frac{dF}{dx}},$$

wie wir behauptet hatten; die Richtung der Normale zur Oberfläche fällt also zusammen mit der von demselben Punkt zu dem Krümmungsmittelpunkt der kürzesten Linie geführten Gerade. Mit anderen Worten, die osculirende Ebene dieser Curve ist beständig normal zu der Oberfläche.

198. Kleinste Umdrehungsfläche. — Nehmen wir uns vor die ebene Curve zu finden, welche durch zwei gegebene Punkte geht und eine kleinste Fläche erzeugt, indem sie um eine in ihrer Ebene liegende Axe AX rotirt.

Das Integral $\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{dx^2 + dy^2}$ soll ein Minimum werden; und da x nicht unter dem Zeichen $\int$ vorkommt, so ist es angemessen die Gleichungen (17) oder die Gleichung (b) in Nr. 192 anzuwenden. Nimmt man die ersteren und berücksichtigt, dass L, N, P, ... Null sind, so findet man, indem man durch c eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$M = c, \text{ oder } \frac{y\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = c;$$

woraus man zieht

$$y^2 = c^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right), \quad dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

und integrirend

$$\frac{x - c_1}{c} = l.\left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}\right), \quad y + \sqrt{y^2 - c^2} = c e^{\frac{x - c_1}{c}},$$

daher

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x - c_1}{c}} + e^{-\frac{x - c_1}{c}}\right),$$

die Gleichung einer Kettenlinie, deren unendliche Zweige über der Axe der x emporsteigen.

Die Constanten c, c_1 bestimmen sich, indem man ausdrückt, dass der Gleichung durch die Coordinaten der gegebenen Punkte genügt wird. Betrachtet man den einfachsten Fall, wo die Ordinaten dieser Punkte gleich sind, so wird die Curve symmetrisch sein in Bezug auf die Senkrechte zur Axe, welche in gleicher Entfernung von diesen beiden Punkten geführt ist. Es seien a und $-a$ ihre respectiven Abscissen, und b ihre Ordinate, so hat man zunächst $c_1 = 0$, damit die Gleichung sich nicht ändert, wenn man x durch $-x$ ersetzt; darauf

$$b = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{a}{c}} + e^{-\frac{a}{c}}\right),$$

was c bestimmt.

Setzt man $\frac{a}{c} = u$, so hat man $\frac{bu}{a} = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$, und man wird u finden durch den Durchschnitt der Gerade $y = \frac{bu}{a}$ mit der Kettenlinie $y = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$; der Werth von c folgt daraus.

199. Es ist nicht immer möglich, der Gleichung

$$\frac{2b}{a} = \frac{e + e^{-u}}{u}$$

zu genügen.

In der That, das zweite Glied ist unendlich für $u = 0$ und $u = \infty$; dazwischen bleibt es endlich und positiv: es hat also ein Minimum, und das Problem wäre unmöglich, wenn $\frac{2b}{a}$ kleiner wäre. Suchen wir daher den Werth von diesem Minimum: es wird eine einzige Auflösung geben, wenn man $\frac{2b}{a}$ gleich diesem Werthe giebt; zwei, wenn es grösser ist; und keine, wenn es kleiner ist.

Der auf dieses Minimum bezügliche Werth von u genügt

$$\frac{e^u + e^{-u}}{u} = e^u - e^{-u}.$$

Wenn man u zwischen dieser Gleichung und der vorigen eliminirte, so würde man die Gleichung erhalten, welche den kleinsten Werth bestimmen muss, den $\frac{b}{a}$ haben kann, damit das Problem möglich sei.

Wenn man bemerkt, dass man identisch hat

$$(e^u - e^{-u})^2 = (e^u + e^{-u})^2 - 4,$$

so kann man die letzte Gleichung so schreiben

$$\frac{e^u + e^{-u}}{u} = \sqrt{(e^u + e^{-u})^2 - 4},$$

woraus hervorgeht

$$\frac{2b}{a} = \sqrt{\frac{4b^2u^2}{a^2} - 4},$$

und folglich

$$u^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2}.$$

Aber

$$\frac{2b}{a} = e^u - e^{-u} = 2\left(u + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2\ldots5} + \ldots\right),$$

daher

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}\left[1 + \frac{1 + \frac{a^2}{b^2}}{1.2.3} + \frac{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}{1.2\ldots5} + \ldots\right].$$

Wenn man $\frac{a}{b}$ in dem zweiten Gliede vernachlässigt, so wird es zu klein; also

$$\frac{b}{a} > 1 + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots5} + \ldots.$$

Der reciproke dieses Werthes ist also grösser als $\frac{a}{b}$; und wenn man ihn in dem zweiten Gliede substituirt, so wird es zu gross und giebt eine obere Grenze von $\frac{b}{a}$. Hieraus resultirt ein zu kleiner Werth für $\frac{a}{b}$; und, indem man so fortfährt, erhält man eine Reihe von abwechselnd grösseren und kleineren Werthen als $\frac{b}{a}$, welche sich ihm unbegrenzt nähern. Man findet so

$$\frac{b}{a} = 1{,}19967.$$

Es muss also das Verhältniss $\frac{b}{a}$ wenigstens gleich 1,19967 sein, wenn es eine Curve geben soll, die eine kleinste Oberfläche erzeugt; und man begreift die Möglichkeit dass es keine giebt, wenn man bemerkt, dass wenn die Curve die Axe schneidet, die Ordinaten negativ werden, und das Integral unbegrenzt abnimmt.

Wenn $\frac{b}{a} > 1{,}19967$, so hat man zwei Auflösungen; aber sie können nicht zwei Minima geben, denn es müsste dazwischen ein Maximum liegen, was drei Auflösungen verlangen würde. Sie können auch nicht zwei Maxima geben, sie geben also ein Maximum und ein Minimum. Da das Integral bis zum negativen Unendlichen abnimmt, so sieht man, dass das Maximum der Kettenlinie entsprechen wird, welche ihren Scheitel am tiefsten hat, und das Minimum derjenigen, deren Scheitel am höchsten liegt. Diese letztere entspricht dem grössten der zwei Werthe von c, weil die Gleichung der Curve ist

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right),$$

und weil, indem man $x = 0$ macht, man c zur Ordinate des Scheitels findet.

200. Der grösste Flächenraum isoperimetrischer Curven. — Nehmen wir an, dass die Endpunkte der Curve gegeben seien und zu Coordinaten haben x_1, y_1 und x_2, y_2; das zu einem Maximum zu machende Integral ist $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$, und man soll haben, indem man durch l die Länge der gegebenen Curve bezeichnet,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\,\sqrt{1 + y'^2} = l.$$

Man wird setzen nach der Regel des relativen Maximums

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[\left(y + \alpha\sqrt{1 + y'^2}\right) dx\right] = 0;$$

da x nicht unter dem Zeichen $\int$ vorkommt, so wendet man die Gleichung (b) in Nr. 192 an, und man findet

$$y + \alpha \sqrt{1 + y'^2} = \frac{\alpha y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} + c,$$

oder

$$(y - c) \sqrt{1 + y'^2} + \alpha = 0;$$

woraus

$$dx = \frac{(y - c)\, dy}{\sqrt{\alpha^2 - (y - c)^2}},$$

und endlich

$$(y - c)^2 + (x - c')^2 = \alpha^2,$$

wo c und c' zwei willkürliche Constanten. Die Curve ist also ein Kreis, und es erübrigt die Constanten α, c, c' zu finden. Man wird zunächst ausdrücken, dass er durch die beiden extremen Punkte M und N geht; dies giebt

$$(x_1 - c')^2 + (y_1 - c)^2 = \alpha^2,$$
$$(x_2 - c')^2 + (y_2 - c)^2 = \alpha^2;$$

woraus

$$x_1{}^2 - x_2{}^2 - 2c'(x_1 - x_2) + y_1{}^2 - y_2{}^2 - 2c(y_1 - y_2) = 0,$$

welche Gleichung ausdrückt, dass der Mittelpunkt auf der Senkrechte liegt, welche errichtet ist in der Mitte der die beiden Endpunkte verbindenden Gerade.

Es sei d die gegebene Länge dieser Gerade, so hat man

$$d = 2\alpha \sin \frac{l}{2\alpha},$$

welche Gleichung α bestimmt; c und c' folgen daraus, und man findet zwei Kreise, deren Mittelpunkte O, O' symmetrisch liegen in Bezug auf die gegebene Sehne. Der eine bezieht sich auf das Maximum, der andere auf das Minimum: denn die beiden Flächen sind respective gleich dem Trapez $MPQN$, vermehrt oder vermindert um dieselbe Grösse MRN; wenn also die eine ein Maximum, so ist die andere ein Minimum. Man

Fig. 5.

schliesst daraus noch, dass die Fläche MRN ein Maximum ist; und wenn die Aufgabe zum Gegenstand die zwischen der gegebenen Sehne und dem Bogen enthaltene Fläche hat, so ist sie nur eines Maximums fähig, und dieses wird durch den Kreisbogen bestimmt, dessen Sehne und Länge bekannt sind.

Wenn die Grösse des Bogens und die Richtung der Axen so wären, dass das Segment MRN durch die extremen Ordinaten geschnitten würde, so würde dieser letzte Satz darum nicht weniger wahr sein: denn, wenn man sich die Curve bestimmt denkt, so kann man darin auf unendlich viele Weisen eine solche Sehne ziehen, dass man für ein passendes Axensystem sich in dem vorigen Falle befindet. Da nun die totale Fläche ein Maximum ist, so wird dieses Segment es ebenso sein, indem man seinen Perimeter constant lässt; also wird es durch einen Kreisbogen begrenzt: was nicht sein könnte für alle Sehnen, welche man sich so denken kann, wenn nicht die ganze Curve ein Kreisbogen wäre. Wenn die beiden Punkte M und N zusammenfallen, so hat man den Fall einer geschlossenen Curve, und man sieht, dass sie einen ganzen Kreis bilden muss.

201. **Maximum der durch die Rotation isoperimetrischer Curven erzeugten Oberflächen.** — In diesem Falle muss $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\sqrt{1+y'^2}$ ein Maximum sein zu gleicher Zeit mit $\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2} = l$; man muss also setzen

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[\left(y\sqrt{1+y'^2} + \alpha\sqrt{1+y'^2}\right)dx\right] = 0,$$

oder

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[(y+\alpha)\sqrt{1+y'^2}\,dx\right] = 0.$$

Die Rechnung wird dieselbe sein wie in dem schon behandelten Falle, wo man die Länge der Curve nicht gab. Nur ist $y+\alpha$ dem y substituirt. Man findet also

$$y + \alpha = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c_1}{c}} + e^{-\frac{x-c_1}{c}}\right).$$

Die Curve ist wieder eine Kettenlinie. Die drei Constanten α, c, c_1 bestimmen sich, indem man ausdrückt dass die Curve durch die beiden gegebenen Punkte geht, und dass l ihre Länge ist.

202. Man zeigt in der Statik, dass die Kettenlinie von allen isoperimetrischen Curven diejenige ist, deren Schwerpunkt so tief als möglich liegt. Von dieser Eigenschaft ausgehend hätte man folgern können, dass die Curve, welche die kleinste Oberfläche erzeugt, eine Kettenlinie ist, deren Convexität sich gegen die Axe kehrt, und dass diejenige welche die grösste Fläche erzeugt jene ist, welche man erhalten würde, indem man sich die Wirkung der Schwere im entgegengesetzten Sinne gerichtet dächte.

203. **Der kleinste Körper, welcher durch die Rotation isoperimetrischer Curven erzeugt wird.** — Es sei l die Länge einer Curve, welche durch zwei gegebene Punkte geht und um eine in ihrer Ebene liegende Axe rotirt; der erzeugte Körper hat zum Ausdruck $\int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx$. Also soll $\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$ ein Minimum werden mit der Bedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2} = l.$$

Man muss also setzen

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta\left[\left(y^2 + \alpha\sqrt{1+y'^2}\right) dx\right] = 0,$$

und die Bedingung des Minimums ist, indem man die Formel (b) in Nr. 192 anwendet,

$$y^2 + \alpha\sqrt{1+y'^2} = \frac{\alpha y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + c,$$

oder

$$(y^2 - c)\sqrt{1+y'^2} + \alpha = 0;$$

woraus man zieht

$$dx = \frac{(y^2 - c)\, dy}{\sqrt{\alpha^2 - (y^2 - c)^2}}.$$

Diese Gleichung ist diejenige der sogenannten elastischen

Curve, welche die Gestalt einer im Gleichgewicht unter der Wirkung gewisser Kräfte befindlichen Feder darstellt. Man kann sie nur durch Reihen integriren. Die beiden Constanten α und c, sowie die bei der Integration eingehende, würden sich bestimmen, indem man ausdrückt dass die Curve durch die beiden gegebenen Punkte geht, und dass ihre Länge l ist.

204. Brachistochrone. — So nennt man die Curve, welche ein schwerer Körper befolgen muss, um von einem Punkte zu einem anderen in der kürzesten Zeit zu gelangen. Durch g die Schwere bezeichnend hat man

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(x_1 - x),$$

indem man durch x die vertical, in entgegensetztem Sinne mit der Schwere gezählten Ordinaten bezeichnet, und durch x_1 diejenige des höchsten Punktes. Man zieht hieraus

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{x_1 - x}};$$

und um der gegebenen Bedingung zu genügen, muss das Integral $\int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{x_1 - x}}$ ein Minimum werden, oder das negative Integral $\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{x_1 - x}}$ ein Maximum. Dies liefert zunächst die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \frac{dy}{ds} = c, \quad \frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \frac{dz}{ds} = c',$$

woraus

$$\frac{dy}{dz} = \frac{c}{c'}, \quad y = \frac{c}{c'} z + c''.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Curve in einer Verticalebene enthalten ist. Nehmen wir diese zur Ebene der x und y; sie ist bekannt, weil sie die beiden gegebenen Punkte enthält. Man hat dann $z = 0$, und es bleibt nur die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{x_1 - x}} \frac{dy}{ds} = c, \quad \text{woraus } dy = -\frac{dx\sqrt{x_1 - x}}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - (x_1 - x)}}.$$

Verwandelt man $x_1 - x$ in x, so wird diese Gleichung

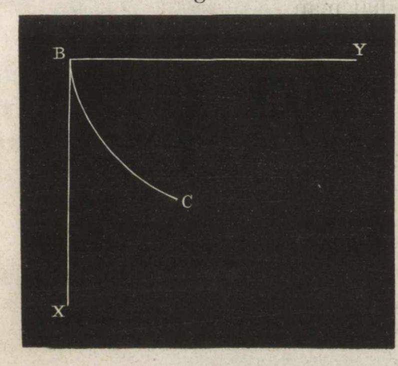
$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{c^2} - x}},$$

was sich leicht integriren lässt.

Diese Curve ist eine Cycloide, deren Lage wir finden wollen.

Wenn B und C die beiden gegebenen Punkte sind, so kommt die Transformation, welche wir gemacht haben, darauf hinaus den Ursprung in B zu nehmen, und die Axe der x in der Richtung der Schwere. In diesem System von Axen würde eine Cycloide, deren Basis $B\,Y$ und deren Anfangspunkt in B wäre, die Differentialgleichung haben

Fig. 6.



$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

während a der Radius des erzeugenden Kreises wäre.

Die gesuchte Curve ist also eine Cycloide, deren Basis $B\,Y$, deren Durchmesser des Erzeugungskreises $\frac{1}{c^2}$ ist, und von welcher der eine Endpunkt der Basis in B liegt.

Die Constante c wird sich bestimmen, indem man ausdrückt, dass der endlichen Gleichung der Cycloide genügt wird durch die Coordinaten des Punktes C.

205. Nehmen wir jetzt an, dass die beiden Endpunkte, anstatt fest zu sein, genöthigt seien sich auf gegebenen Curven zu befinden. Man würde wie in dem ersten Falle zu der Gleichung $y = \frac{c}{c'} z + c''$ gelangen, welche zeigt, dass die Curve noch in einer Verticalebene liegt. Diese Ebene ist unbekannt, aber die Gleichung der Curve, bezogen auf in dieser Ebene genommene Axen, würde darum nicht weniger die schon gefundene Form haben; woraus man schliesst, dass diese Curve eine Cycloide ist, deren Basis horizontal und deren Anfang

im Ausgangspunkte liegt. Alles reducirt sich darauf, die Coordinaten der beiden extremen Punkte und den Radius des erzeugenden Kreises zu finden. Da die beiden Grenzen von einander unabhängig sind, so muss man für die erste die Gleichung haben

$$(a)\left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx_1}\,dx - (V - Ny' - N'z')_1\right]\delta x_1 - N\delta y_1 - N'\delta z_1 = 0.$$

In dem gegenwärtigen Falle hat man

$$V = \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{x_1 - x}},$$

$$N = \frac{y'}{\sqrt{x_1 - x}\,\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c,$$

$$N' = \frac{z'}{\sqrt{x_1 - x}\,\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c',$$

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{(x_1 - x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung (a) wird also

$$\left.\begin{array}{l}\left[\int_{x_1}^{x_2} - \frac{(x_1 - x)^{-\frac{3}{2}}\,dx}{2}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - V_1 + cy'_1 + c'z'_1\right]\delta x_1 \\ \qquad\qquad - c\delta y_1 - c'\delta z_1\end{array}\right\} = 0.$$

Die theilweise Integration giebt

$$\int - \frac{(x_1 - x)^{-\frac{3}{2}}}{2}\,dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = -(x_1 - x)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

$$+ \int \frac{(x_1 - x)^{-\frac{1}{2}}(y'y'' + z'z'')\,dx}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = - V + \int (cy'' + c'z'')\,dx$$

$$= - V + cy' + c'z'.$$

In diesem letzten Ausdrucke muss man dem x successive x_2 und x_1 substituiren und das zweite Resultat vom ersten abziehen. Um die von dem Factor $(x_1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, welcher unendlich wird, herrührende Schwierigkeit zu vermeiden, nehmen wir zuerst eine von x_1 verschiedene Grenze, und bewerkstelligen die Reductionen; dann gehen wir zu der Grenze x_1 über. Die drei

Terme $V - cy' - c'z'$, welche sich auf diese gegen x_1 convergirende Grenze beziehen, heben sich gegen $- V_1 + cy'_1 + c'z'_1$ in (a) weg, und es bleibt endlich die Gleichung

(b) $$(- V + cy' + c'z')_2 \delta x_1 - c\delta y_1 - c'\delta z_1 = 0.$$

Indem man die Werthe von V, c, c' substituirt, findet man

$$- V + cy' + c'z' = \frac{-1}{\sqrt{x_1 - x}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

und die Gleichung (b) wird

$$dx_2\delta x_1 + dy_2\delta y_1 + dz_2\delta z_1 = 0.$$

Sie drückt aus, dass das letzte Element der gesuchten Curve senkrecht ist zu der Richtung der Tangente an der ersten gegebenen Curve im Ausgangspunkte.

Die auf die zweite Grenze sich beziehende Gleichung ist

$$(V - Ny' - N'z')_2\delta x_2 + N\delta y_2 + N'\delta z_2 = 0,$$

oder

$$dx_2\delta x_2 + dy_2\delta y_2 + dz_2\delta z_2 = 0,$$

welches zeigt, dass das letzte Element der Cycloide senkrecht ist zu der Tangente an der gegebenen zweiten Curve im Ankunftspunkte.

Diese verschiedenen Bedingungen bestimmen die Cycloide, deren erstes Element immer vertical, und deren Basis horizontal ist.

Wären die beiden Curven in einer und derselben Verticalebene, so würden die Eigenschaften, welche wir dargethan haben, beweisen, dass die Tangenten an den gegebenen Curven im Ausgangs- und im Ankunftspunkte zu einander parallel sind.

Rechnung mit endlichen Differenzen.

---

206. Differenz einer Variable nennt man den endlichen Zuwachs, welchen sie annimmt. Die Differenzen der Functionen sind durch diejenigen der Variablen, von welchen sie abhängen, bestimmt; man bezeichnet sie alle ohne Unterschied durch das Zeichen Δ.

Die Differenz zwischen den zwei Werthen, welche eine Function annimmt, wenn die Variable, von welcher sie abhängt, zwei successive Werthe erhält, wird die erste Differenz dieser Function genannt. Diese Differenz ist im Allgemeinen eine Function derselben Variable; und ihre erste Differenz, welche einem neuen gleichen Zuwachs dieser Variable entspricht, heisst die zweite Differenz der Function. Die Differenz der zweiten Differenz ist die dritte Differenz der Function; und so fort. Wenn man durch u diese Function bezeichnet, so sind ihre successiven Differenzen repräsentirt durch

$$\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \ldots \Delta^m u.$$

207. Nehmen wir allgemein an, dass die Differenz Δx eine bestimmte Function $f(x)$ sei, und es seien

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{m-1},\ x_m,\ \text{etc.}$$

die successiven Werthe, welche daraus für die Variable x resultiren; dergestalt dass man habe

$$x_1 = x + \Delta x,\quad x_2 = x_1 + \Delta x_1,\quad x_3 = x_2 + \Delta x_2, \ldots,$$
$$x_m = x_{m-1} + \Delta x_{m-1},$$

welche Gleichungen sich so schreiben lassen:

$$x_1 = x + \varDelta x,$$
$$x_2 = x + \varDelta x + \varDelta x_1,$$
$$x_3 = x + \varDelta x + \varDelta x_1 + \varDelta x_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{m-1} = x + \varDelta x + \varDelta x_1 + \ldots + \varDelta x_{m-2},$$
$$x_m = x + \varDelta x + \varDelta x_1 + \ldots + \varDelta x_{m-1}.$$

Alle diese Ausdrücke können betrachtet werden als einzig abhängend von dem ersten willkürlichen Werthe x; denn da $\varDelta x$ eine Function von x ist, so ist x_1 oder $x + \varDelta x$ es ebenfalls. $\varDelta x_1$ oder $f(x_1)$ ist also auch Function von x allein, und folglich auch x_2, welches gleich $x + \varDelta x + \varDelta x_1$ ist. Ebenso wird $\varDelta x_2$ oder $f(x_2)$ Function von x allein sein, und folglich auch x_3; und ebenso die anderen ohne Ende fort.

Es ist noch nützlich zu bemerken, dass jeder dieser successiven Werthe sich aus dem vorhergehenden bilden kann, indem man darin x in $x + \varDelta x$ verwandelt. In der That, nehmen wir an, dass es sich so verhalte bis zu x_{m-1} inclusive, und verwandeln wir x in $x + \varDelta x$ in x_{m-1}: sein erstes Glied x wird $x + \varDelta x$; sein zweites Glied $\varDelta x$ wird $\varDelta x_1$; sein drittes $\varDelta x_1$ wird $\varDelta x_2$, und endlich sein letztes wird $\varDelta x_{m-1}$; folglich findet sich x_{m-1} verwandelt in x_m. Der Satz ist also allgemein, weil er wahr ist für x_1. Wenn man jetzt irgend eine Function $u = \varphi(x)$ betrachtet, und durch

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_{m-1},\ u_m, \ldots$$

die mit $x, x_1, \ldots, x_m$ correspondirenden Werthe bezeichnet, so kann jeder dieser successiven Werthe von u betrachtet werden als Function von x allein, und man kann ihn aus dem vorhergehenden herleiten, indem man darin x in $x + \varDelta x$ verwandelt; denn, weil man allgemein hat

$$u_{m-1} = \varphi(x_{m-1}),\ u_m = \varphi(x_m),$$

und weil x_m nur von x abhängt, und erhalten wird indem man x in $x + \varDelta x$ verwandelt in x_{m-1}, so ist auch u_m Function von x allein, und wird offenbar aus u_{m-1} durch dieselbe Verwandlung erhalten.

208. Nach der Definition, welche wir von den successiven Differenzen gaben, ist die zweite Differenz $\varDelta^2 u$ der Zuwachs, welchen $\varDelta u$ annimmt, wenn man darin x in $x + \varDelta x$ verwandelt; die dritte Differenz $\varDelta^3 u$ ist der Zuwachs von $\varDelta^2 u$, wel-

cher aus demselben Zuwachse Δx, den man darin x erleiden lässt, resultirt; und so fort.

Ebenso, da Δu_1 der Zuwachs von u_1 ist, welcher sich auf den dem x_1 gegebenen Zuwachs Δx_1 bezieht, so ist $\Delta^2 u_1$ der Zuwachs von Δu_1, wenn man darin x_1 um Δx_1 wachsen lässt; und ebenso für die folgenden Differenzen. Man sieht also, dass die successiven Differenzen von u_1 dieselben Functionen von x_1 sind wie diejenigen von u es von x sind; und ebenso ist es für die Differenzen von u_2, u_3, . . ., u_m etc. Hieraus geht hervor, dass man alle Differenzen von u_m erhalten würde, indem man x_{m-1} in x_m verwandelte in den correspondirenden Differenzen von u_{m-1}; und da man gesehen hat, dass diese Verwandlung geschieht, indem man $x + \Delta x$ dem x substituirt, wenn man x_{m-1} ausgedrückt betrachtet als Function von x, so folgt, dass die Differenzen irgend einer und derselben Ordnung der Grössen

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{m-1},\ u_m,\ \ldots$$

sich jede aus der vorhergehenden herleiten, indem man darin x in $x + \Delta x$ verwandelt. Man bemerkt noch dass man, um $\Delta^n u_p$ d. h. den Zuwachs von $\Delta^{n-1} u_p$, wenn man x_p in $x_p + \Delta x_p$ verwandelt, zu erhalten, nur den Zuwachs zu nehmen braucht, welchen $\Delta^{n-1} u_p$ als Function von x betrachtet annimmt, wenn man x in $x + \Delta x$ verwandelt.

Diese Eigenschaften gehören den successiven Differenzen von x an, wie denjenigen der beliebigen Function u.

209. Es ist leicht die Differenz $\Delta^m u$ auszudrücken vermöge der $m + 1$ Werthe u, u_1, u_2, . . ., u_m.

In der That, man hat zuerst

$$\Delta u = u_1 - u.$$

Um $\Delta^2 u$ zu erhalten, muss man, in dem Ausdruck von Δu, x in $x + \Delta x$ verwandeln und den resultirenden Zuwachs nehmen. Da diese Substitution u_1 und u respective in u_2 und u_1 verwandelt, so findet man

$$\Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u.$$

Ebenso ist $\Delta^3 u$ der Zuwachs des Ausdrucks von $\Delta^2 u$, wenn man x in $x + \Delta x$ verwandelt, und man hat

$$\Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u.$$

Man sieht bis hierher, dass die Indices von u um eine Einheit abnehmen von der Ordnung der Differenz an bis zu Null;

dass die Coëfficienten abwechselnd positiv oder negativ, und gleich sind denjenigen der Potenz derselben Ordnung eines Binoms. Und die Art des Uebergangs von einer Differenz zur folgenden beweist, dass dieses Gesetz allgemein ist.

In der That, wenn man hat

$$\Delta^n u = u_n - A_1 u_{n-1} + A_2 u_{n-2} - \cdots \\ + A_p u_{n-p} - A_{p+1} u_{n-p-1} + \cdots,$$

so ist die folgende Differenz

$$\Delta^{n+1} u = u_{n+1} \begin{array}{r|} -A_1 \\ -1 \end{array} u_n \begin{array}{r|} +A_2 \\ +A_1 \end{array} u_{n-1} - \cdots \begin{array}{r|} -A_{p+1} \\ -A_p \end{array} u_{n-p} + \cdots$$

Das Gesetz der Indices von u ist also das nämliche für diese Differenz, und die Coëfficienten bilden sich aus denjenigen der vorhergehenden, indem man den Absolutwerth eines jeden von ihnen zu dem ihm vorhergehenden addirt: wenn also für eine Differenz diese Coëfficienten diejenigen der Potenz derselben Ordnung eines Binoms wie $\alpha - \beta$ sind, so sind sie demselben Gesetz für die folgende Differenz unterworfen. Also ist dieses Gesetz allgemein, da es für die zweite Differenz als richtig erkannt ist.

Man hat also, was auch m sei,

$$(1)\quad \Delta^m u = u_m - m u_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u_{m-2} - \cdots \pm u:$$

das letzte Glied ist positiv wenn m gerade, und negativ im anderen Falle.

210. Umgekehrt kann man u_m ausdrücken durch u und die m Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, ..., $\Delta^m u$. In der That, man hat

$$u_1 = u + \Delta u, \quad u_2 = u + 2\Delta u + \Delta^2 u, \ldots;$$

und da allgemein

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1},$$

so sieht man, dass wenn man hat

$$u_{n-1} = u + A_1 \Delta u + A_2 \Delta^2 u + \cdots \\ + A_p \Delta^p u + A_{p+1} \Delta^{p+1} u + \cdots,$$

man haben wird

$$u_n = u \begin{array}{r|} +A_1 \\ +1 \end{array} \Delta u \begin{array}{r|} +A_2 \\ +A_1 \end{array} \Delta^2 u + \cdots \begin{array}{r|} +A_{p+1} \\ +A_p \end{array} \Delta^{p+1} u + \cdots.$$

Wenn also die Coëfficienten der Glieder von u_{n-1} diejenigen der Entwicklung von $(\alpha + \beta)^{n-1}$ sind, so werden die Coëf-

ficienten der Glieder von u_n diejenigen von $(\alpha + \beta)^n$ sein; was die Indices der Differenzen betrifft, so wachsen sie ebenfalls von 0 bis zu n. Nun finden diese Gesetze statt für u_2; also sind sie allgemein, und man hat

$$(2) \qquad u_m = u + m\Delta u + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}\Delta^2 u + \ldots + \Delta^m u\,.$$

Die Analogie zwischen den zweiten Gliedern der Gleichungen (1) und (2) und der Entwicklung der $m$ten Potenz eines Binoms erlaubt uns, sie zu ersetzen durch die sehr einfachen symbolischen Gleichungen

$$\Delta^m u = (u-1)^m, \quad u_m = (1 + \Delta u)^m,$$

welche man so verstehen muss, dass die Potenzexponenten von u und Δu durch Indices ersetzt werden.

211. Differenzirung der Functionen. — Die erste Differenz einer Function $u = F(x)$ ist $F(x + \Delta x) - F(x)$. Untersuchen wir, was aus dieser Differenz und denen der folgenden Ordnungen wird, wenn man für $F(x)$ die einfachen Functionen x^m, a^x, $log\, x$, $sin\, a\, x$, $cos\, a\, x$ nimmt und Δx constant voraussetzt.

Es sei zuerst $u = Ax^m$; ist m positiv und ganz, so hat man

$$\Delta u = A\left[m x^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^m\right].$$

Die erste Differenz eines Monoms ist also von einem um eine Einheit niedrigeren Grade; und ebenso verhält es sich für irgend ein Polynom, weil die Differenz einer Summe die Summe der Differenzen ist.

Hieraus folgt, dass die $m$te Differenz eines ganzen Polynoms von $m$ten Grade unabhängig ist von x. Es sei z. B.

$$u = Ax^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m;$$

um sie zu finden, braucht man nur in jeder successiven Differenz das Glied vom höchsten Grade zu betrachten: denn die durch die anderen gelieferten Glieder werden spätestens bei der letzten Differenzirung verschwinden; sie ändern also das Resultat durchaus nicht. Man braucht daher nur die $m$te Differenz von Ax^m zu berechnen.

Seine erste Differenz hat zum ersten Gliede

$$Amx^{m-1}\Delta x,$$

und wir vernachlässigen alle folgenden, deren Grad niedriger ist. Die Differenz dieses ersten Gliedes, in welchem wir Δx constant voraussetzen, hat zum ersten Gliede

$$Am(m-1)x^{m-2}\Delta x^2,$$

und wir vernachlässigen wieder die folgenden.

So fortfahrend gelangt man offenbar zu

$$\Delta^m u = Am(m-1)(m-2)\ldots 2 \,.\, 1 \;\Delta x^m.$$

Da die $m$te Differenz constant ist, was auch x sei, so sind die Differenzen höherer Ordnungen Null.

212. Wenn man das Product von n, um Δx differenten Factoren

$$u = x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]$$

betrachtet, so findet man sogleich

$$\Delta u = (x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]\,n\Delta x,$$
$$\Delta^2 u = (x+2\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]\,n(n-1)\Delta x^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^n u = n(n-1)\ldots 2 \,.\, 1\Delta x^n.$$

Alle folgenden Differenzen sind Null.

Wenn man hätte

$$u = \frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n-1)\Delta x]},$$

so würde man finden

$$\Delta u = \frac{-n\Delta x}{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)},$$
$$\Delta^2 u = \frac{n(n+1)\Delta x^2}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n+1)\Delta x]},$$
$$\Delta^3 u = \frac{-n(n+1)(n+2)\Delta x^3}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(n+2)\Delta x]};$$

und so unbegrenzt fort.

213. Die allgemeine Formel (1) wird in dem Falle von $u = x^n$

$$\Delta^m u = (x+m\Delta x)^n - m[x+(m-1)\Delta x]^n$$
$$+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}[x+(m-2)\Delta x]^n \ldots \mp m(x+\Delta x)^n \pm x^n.$$

Wenn $m = n$, so ist das zweite Glied der Gleichung gleich

$1.2.3\ldots n\Delta x^n$, was auch x sei. Wenn man in diesem Falle $x=0$ macht, so erhält man, was auch die ganze Zahl n sei,

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \ldots \mp n = 1.2.3\ldots n.$$

Wenn $m > n$, so ist $\Delta^m u$ Null, und man erhält $x=0$ machend

$$m^n - m(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^n + \ldots \mp m = 0.$$

Diese beiden bemerkenswerthen Formeln sind in der Zahlentheorie von Nutzen.

214. Es sei jetzt

$$u = a^x,$$

so hat man

$$\Delta u = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1);$$
$$\Delta^2 u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2,$$
$$\Delta^3 u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^m u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^m.$$

215. Es sei

$$u = \log x,$$

so hat man

$$\Delta u = \log(x+\Delta x) - \log x = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

216. Es sei

$$u = \sin(ax+b),$$
$$\Delta u = \sin(ax + a\Delta x + b) - \sin(ax+b)$$
$$= 2\sin\frac{a\Delta x}{2}\cos\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right).$$

Wenn $u = \cos(ax+b)$, so hat man

$$\Delta u = \cos(ax + a\Delta x + b) - \cos(ax+b)$$
$$= -2\sin\frac{a\Delta x}{2}\sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right).$$

Vermöge dieser beiden Formeln erhält man

$$\Delta^2 \sin(ax+b) = -4\left(\sin\frac{a\Delta x}{2}\right)^2 \sin(ax + a\Delta x + b),$$

und allgemein

$$\Delta^{2n} \sin(ax+b) = \pm 2^{2n} \left(\sin \frac{a\Delta x}{2}\right)^{2n} \sin(ax+na\Delta x+b),$$

$$\Delta^{2n+1} \sin(ax+b) = \pm 2^{2n+1} \left(\sin \frac{a\Delta x}{2}\right)^{2n+1} \cos[ax+(n+\tfrac{1}{2})a\Delta x+b];$$

die oberen Zeichen sind zu nehmen wenn n gerade, und die unteren Zeichen wenn n ungerade.

Für $\cos ax$ gelten ähnliche Formeln.

217. Die $m$te Differenz $\Delta^m u$ lässt sich allgemein ausdrücken vermöge der Ableitungen von u, und man kann sie durch eine sehr einfache symbolische Formel darstellen.

Man hat zuerst

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{1.2} + \dots.$$

Wenn man u in Δu verwandelt, so hat man $\Delta^2 u$, und es ist leicht zu sehen, dass kein Glied eine Ableitung von niedrigerer Ordnung als der zweiten enthält. Indem man so fortfährt, sieht man ein, dass $\Delta^m u$ von folgender Form sein wird:

$$\Delta^m u = A \frac{d^m u}{dx^m} \Delta x^m + A_1 \frac{d^{m+1} u}{dx^{m+1}} \Delta x^{m+1} + \dots,$$

wo die Coëfficienten A, A_1, ... unabhängig sind von der Form der Function u.

Um sie zu bestimmen, setzen wir $u = e^x$, so wird die Gleichung, indem man den Factor e^x weglässt,

$$(e^{\Delta x} - 1)^m = A \Delta x^m + A_1 \Delta x^{m+1} + \dots;$$

und da Δx unbestimmt ist, so müssen die Coëfficienten derselben Potenzen beiderseits gleich sein; man kennt also A, A_1, ...

Der Werth von $\Delta^m u$ lässt sich durch eine symbolische Formel darstellen, indem man bemerkt, dass das zweite Glied der letzten Gleichung sich in den Werth von $\Delta^m u$ verwandeln würde, wenn man $\frac{du}{dx}\Delta x$ dem Δx substituirte und wenn in den Potenzen von $\frac{du}{dx}$ der Exponent des Zählers in einen Differentiationsindex verwandelt würde. Man hat also in diesem Sinne

$$\Delta^m u = \left(e^{\frac{du}{dx}\Delta x} - 1\right)^m.$$

218. Kann man die Differenz zweier Functionen finden, so ist es leicht diejenige ihres Products zu finden, oder ihres Quotienten, vermöge der Formeln

$$\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v,$$

$$\Delta\frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Wenn man Producte von mehr als zwei Factoren betrachtete, so würde die Formel sich schnell compliciren. In dem Falle wo sie gleich wären, würde man unmittelbar finden

$$\Delta(u^n) = nu^{n-1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}\Delta u^2 + \ldots + \Delta u^n.$$

Rechnung mit endlichen Summen.

---

219. Die Aufgabe die man sich in dieser Rechnung vorlegt ist, von der Differenz einer Function zurückzugehen zu dieser Function selbst; oder allgemeiner, eine Function zu bestimmen, wenn man eine Relation zwischen ihr, ihren Differenzen irgend einer Ordnung und der unabhängigen Variable kennt.

Da die Differenz einer von der Variable unabhängigen Grösse Null ist, so folgt, dass wenn man eine Function zu einer gegebenen Differenz gefunden hat, man zu ihr eine willkürliche Constante addiren kann, und so eine allgemeinere Lösung der Aufgabe haben wird. Aber dies würde nicht die allgemeine sein wie in der Infinitesimalrechnung; sondern um sie zu erhalten, muss man zu der gefundenen Function die allgemeinste Function addiren, welche zur Differenz Null hat.

Wenn man aber dem x einen Zuwachs Δx giebt, so wird jede periodische Function von x, welche Δx zur Periode hat, den Zuwachs Null annehmen, von einem beliebigen Werthe von x an; und umgekehrt kann es nur eine solche Function sein, welche dies thut für jeden Werth von x. Man sieht also, dass wenn man den Ausdruck der Differenz einer Function von x giebt, welcher sich auf die Differenz Δx dieser Variable bezieht, es genügt eine besondere Function zu kennen, welche der Aufgabe Genüge leistet; und dass man die allgemeinste Auflösung erhalten wird, indem man zu ihr eine

willkürliche periodische Function addirt, welche zur Periode die gegebene Differenz Δx hat.

Wir wissen dass jede periodische Function durch eine convergente Reihe dargestellt werden kann, deren Glied vom Range $n + 1$ die Form hat

$$A_n \sin \frac{2n\pi x}{l} + B_n \cos \frac{2x\pi x}{l},$$

wo l die Grösse der Periode ist. Man sieht also, dass in dem umgekehrten Problem der Differenzen die willkürliche Constante ersetzt wird durch eine Reihe, deren erstes Glied constant, und deren Glied vom Range $n + 1$ ist

$$A_n \sin \frac{2n\pi x}{\Delta x} + B_n \cos \frac{2n\pi x}{\Delta x}.$$

Diese Reihe werden wir zur Abkürzung mit dem Namen der willkürlichen Constante bezeichnen.

Wir werden durch Σu die allgemeine Function bezeichnen, deren erste Differenz u ist; durch $\Sigma^2 u$ diejenige, deren zweite Differenz u ist, und so fort.

220. Betrachtet man irgend einen Werth x_n der Variable und einen anderen solchen Werth x dass $x_n = x + n\Delta x$, wo n irgend eine ganze Zahl, so ist es leicht den Zuwachs auszudrücken, welchen die Function $F(x)$, deren Differenz u ist, annimmt, wenn die Variable von x zu x_n übergeht; denn er ist die Summe der den Werthen $x, x + \Delta x, \ldots, x + (n-1)\Delta x$ entsprechenden Zuwachse, und sein Werth ist folglich

$$u + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1};$$

man hat also

$$F(x_n) = F(x) + u + u_1 + \cdots + u_{n-1}.$$

Die Function $F(x)$, deren Differenz u ist, kann betrachtet werden als eine willkürliche Constante einschliessend, oder vielmehr selbst als eine willkürliche Constante, wenn man den Werth von x particularisirt.

Bezeichnet man sie durch C, und repräsentirt man durch Σu_n die allgemeinste Function, welche u_n zur Differenz hat, so hat man die Formel:

$$(1) \qquad \Sigma u_n = C + u + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}.$$

221. Man muss bemerken, dass die in C eingehende periodische Function wie eine von x unabhängige Grösse zu be-

handeln ist bei den Integrationen. In der That, nehmen wir an, man suche die allgemeinste Function deren Differenz die Function φ sei, deren Periode $\varDelta x$ ist. Wenn man irgend einen Werth von x und alle diejenigen betrachtet, welche sich von ihm um irgend ein Vielfaches von $\varDelta x$ unterscheiden, so sind die correspondirenden Werthe der gesuchten Function dieselben, wie wenn φ ersetzt wäre durch eine Constante gleich seinem auf den ersten Werth von x sich beziehenden Werthe. Also wird man, indem man φ wie eine von x unabhängige Grösse behandelt, die Function erhalten, deren Differenz φ ist.

Man kann dies übrigens leicht verificiren. In der That, die Function, deren Differenz eine von x unabhängige Grösse a, ist $\frac{a\,x}{\varDelta x} + C$, wo C eine willkürliche Constante in dem schon bestimmten Sinne bezeichnet.

Aber die Differenz von $\frac{\varphi \,.\, x}{\varDelta x}$ ist φ; also ist $\frac{\varphi \,.\, x}{\varDelta x} + C$ die allgemeinste Function, welche zur Differenz φ hat; und da sie sich von der vorstehenden nur durch die Verwandlung von a in φ unterscheidet, so folgt daraus dass diese periodischen Functionen bei den Integrationen wie die eigentlichen Constanten behandelt werden müssen.

Integration der Functionen.

222. Wir fangen damit an, darauf hinzuweisen dass jeder constante Factor nach Belieben unter das Zeichen Σ oder vor dasselbe gebracht werden kann; und dass das Integral Σ einer Summe die Summe der Integrale der Theile ist, woraus sie besteht.

Suchen wir zuerst das Integral von x^m, d. h. die Function welche um x^m wächst, wenn man in ihr dem x den Zuwachs $\varDelta x$ giebt, und welche wir durch Σx^m bezeichnen; hierzu bemerken wir dass man hat

$$\varDelta(x^{m+1}) = (m+1)\,x^m\,\varDelta x + \frac{(m+1)m}{1\,.\,2}\,x^{m-1}\varDelta x^2 + \cdots + \varDelta x^{m+1};$$

nehmen wir jetzt das Integral von jedem Gliede, und betrach-

ten wir die willkürliche Constante als eingeschlossen in den angezeigten Summen; wir erhalten

$$x^{m+1} = (m+1)\,\varDelta x\,\Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{1.2}\varDelta x^2\,\Sigma x^{m-1}$$
$$+ \frac{(m+1)\,m(m-1)}{1.2.3}\varDelta x^3\,\Sigma x^{m-2} + \cdots + \varDelta x^{m+1}\,\Sigma 1,$$

daher

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma x^m = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)\varDelta x} - \dfrac{m\,\varDelta x}{1.2}\,\Sigma x^{m-1} \\ \qquad - \dfrac{m(m-1)\,\varDelta x^2}{1.2.3}\,\Sigma x^{m-2} - \cdots - \dfrac{\varDelta x^m}{m+1}\,\Sigma 1. \end{cases}$$

Wenn man dem m successive die Werthe 0, 1, 2, etc. giebt, so erhält man, durch C eine willkürliche Constante bezeichnend,

$$(3)\quad \begin{cases} \sum 1 = \dfrac{x}{\varDelta x} + C, \\ \sum x = \dfrac{x^2}{2\varDelta x} - \dfrac{1}{2}\,x + C, \\ \sum x^2 = \dfrac{x^3}{3\varDelta x} - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{\varDelta x}{6}\,x + C, \\ \sum x^3 = \dfrac{x^4}{4\varDelta x} - \dfrac{1}{2}\,x^3 + \dfrac{\varDelta x}{4}\,x^2 + C, \\ \sum x^4 = \dfrac{x^5}{5\varDelta x} - \dfrac{1}{2}\,x^4 + \dfrac{\varDelta x}{3}\,x^3 - \dfrac{\varDelta x^3}{30}\,x + C, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Kennt man Σx^m, so kann man $\Sigma^2 x^m$ bestimmen, indem man nach den vorstehenden Formeln das Integral eines jeden der Theile von Σx^m sucht, und nachher eine willkürliche Constante addirt. Man findet ebenso $\Sigma^3 x^m$, $\Sigma^4 x^m$, etc., und bei jeder Integration geht eine neue willkürliche Constante ein.

223. Wir haben im Vorhergehenden die Formel erhalten

$$\varDelta\,[x\,(x+\varDelta x)\cdots(x+n\,\varDelta x)]$$
$$= (x+\varDelta x)\,(x+2\,\varDelta x)\cdots(x+n\varDelta x)\,(n+1)\,\varDelta x;$$

daher

$$\sum (x + \varDelta x)(x + 2\varDelta x) \cdots (x + n\varDelta x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\varDelta x} x(x + \varDelta x) \cdots (x + n\varDelta x) + C.$$

Wir haben ferner gefunden

$$\varDelta \left[\frac{1}{x(x+\varDelta x)\ldots(x+n\varDelta x)}\right] = \frac{-(n+1)\varDelta x}{x(x+\varDelta x)\ldots[x+(n+1)\varDelta x]};$$

also

$$\sum \frac{1}{x(x+\varDelta x)\ldots[x+(n+1)\varDelta x]}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)\varDelta x . x(x+\varDelta x)\ldots(x+n\varDelta x)} + C.$$

224. Bestimmen wir jetzt Σa^x. Wir sahen dass man hat

$$\varDelta a^x = a^x (a^{\varDelta x} - 1);$$

man hat also, indem man die beiden Glieder integrirt und nachher durch $a^{\varDelta x} - 1$ dividirt,

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a^{\varDelta x} - 1} + C,$$

und folglich

$$\sum^n a^x = \frac{a^x}{(a^{\varDelta x} - 1)^n} + \Sigma^{n-1} C.$$

$\Sigma^{n-1} C$ bestimmt sich vermöge der Gleichungen (3), indem man successive $\Sigma^1 C$, $\Sigma^2 C$, etc. sucht.

225. Wir fanden

$$\varDelta \sin(ax + b) = 2 \sin \frac{a\varDelta x}{2} \cos\left(ax + \frac{a\varDelta x}{2} + b\right),$$

$$\varDelta \cos(ax + b) = -2 \sin \frac{a\varDelta x}{2} \sin\left(ax + \frac{a\varDelta x}{2} + b\right).$$

Indem man die beiden Glieder integrirt und $x + \frac{\varDelta x}{2}$ durch x ersetzt, erhält man

$$\sum \sin(ax+b) = -\frac{1}{2\sin\frac{a\varDelta x}{2}}\cdot\cos\left(ax+b-\frac{a\varDelta x}{2}\right)+C,$$

$$\sum \cos(ax+b) = \frac{1}{2\sin\frac{a\varDelta x}{2}}\cdot\sin\left(ax+b-\frac{a\varDelta x}{2}\right)+C.$$

226. Entwicklung des Integrals Σ in Reihen. — Wir haben im Vorhergehenden die Formel gefunden

$$u_n = u + n\varDelta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\varDelta^2 u + \cdots$$

Wenn man voraussetzt, dass der Werth u mit $x = 0$, und dass u_n mit $x = n\varDelta x$ correspondirt und durch u_x bezeichnet wird, so hat man

$$u_x = u + \frac{x}{\varDelta x}\varDelta u + \frac{\frac{x}{\varDelta x}\left(\frac{x}{\varDelta x}-1\right)}{1.2}\varDelta^2 u$$
$$+ \frac{\frac{x}{\varDelta x}\left(\frac{x}{\varDelta x}-1\right)\left(\frac{x}{\varDelta x}-2\right)}{1.2.3}\varDelta^3 u + \cdots$$

Es sei

$$\varDelta u_x = v,\quad u_x = \Sigma v,\quad \varDelta u = v_0,$$

so hat man

$$\sum v = C + \frac{x}{\varDelta x}v_0 + \frac{\frac{x}{\varDelta x}\left(\frac{x}{\varDelta x}-1\right)}{1.2}\varDelta v_0 + \cdots,$$

welche Formel das Integral von v vermöge der Werthe von v und seinen Differenzen, welche sich auf $x = 0$ beziehen, und der willkürlichen Constante C giebt, welche der Werth ist, den Σv für $x = 0$ haben soll.

Wenn die Differenzen Null werden von einer gewissen Ordnung an, so besteht die Reihe aus einer endlichen Zahl von Gliedern.

Wenn man das zweite Integral einer Function verlangte, so würde man die zweite Differenz des Integrals kennen. Man

würde somit in der Entwicklung von u_x kennen $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc., und man könnte u und Δu willkürlich nehmen.

Indem man setzt

$$\Delta^2 u_x = v, \quad u_x = \Sigma^2 v, \quad \Delta^2 u = v_0,$$

würde man haben

$$\sum{}^2 v = C + C' \frac{x}{\Delta x} + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)}{1.2} v_0 + \cdots;$$

wo C und C' zwei willkürliche Constanten. Auf diese Weise würde man eine Summe von irgend einer Ordnung vermöge der gegebenen Function v und ihrer Differenzen, worin man $x = 0$ macht, bestimmen. Es ist leicht zu sehen, dass man von jedem anderen besonderen Werthe von x ausgehen könnte.

227. Man kann auch das Integral Σu ausdrücken vermöge des Integrals $\int u\,dx$ und der Functionen u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, etc.

In der That, das Theorem von Taylor giebt

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

woraus

$$u = \Delta x \sum \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\sum \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\sum \frac{d^3 u}{dx^3} + \ldots.$$

Wenn man alle Summen gleich Null nimmt für $x = x_0$, und durch u_0 den mit x_0 correspondirenden Werth von u bezeichnet, so hat man

$$u - u_0 = \Delta x \sum \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2}\sum \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3}\sum \frac{d^3 u}{dx^3} + \ldots;$$

woraus man zieht

$$\sum \frac{du}{dx} = \frac{u - u_0}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{1.2}\sum \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum \frac{d^3 u}{dx^3} - \ldots.$$

Ersetzt man u successive durch $\int_{x_0}^{x} u\,dx$ und durch $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2 u}{dx^2}$, etc., so erhält man

$$\sum u = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} u\,dx - \frac{\Delta x}{1.2}\sum\frac{du}{dx} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum\frac{d^2u}{dx^2} - \ldots,$$

$$\sum\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x}\frac{du}{dx} - \frac{\Delta x}{1.2}\sum\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum\frac{d^4u}{dx^4} - \ldots,$$

$$\sum\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{1}{\Delta x}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x}{1.2}\sum\frac{d^4u}{dx^4} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3}\sum\frac{d^5u}{dx^5} - \ldots,$$

. . . .,

wo die Glieder ausserhalb der Zeichen Σ zwischen denselben Grenzen x_0, x zu nehmen sind.

Indem man in den Werth von Σu diejenigen von $\sum\frac{du}{dx}$, $\sum\frac{d^2u}{dx^2}$, etc. einsetzt, erhält man eine Gleichung von der Form

$$\sum u = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} u\,dx - \frac{u-u_0}{2} + A\Delta x\frac{du}{dx} + B\Delta x^2\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots$$

Die Coëfficienten A, B, etc. bestimmt man, indem man $u = e^x$ und $x_0 = -\infty$ setzt, was die Identität giebt

$$\frac{1}{e^{\Delta x}-1} = \frac{1}{\Delta x} - \frac{1}{2} + A\Delta x + B\Delta x^2 + \ldots.$$

Die Entwicklung des ersten Gliedes liefert unmittelbar die Coëfficienten A, B, C, ... Es ist aber leicht zu sehen, dass alle diejenigen, welche die geraden Potenzen von Δx multipliciren, Null sind. Hierzu bringen wir den Summanden $-\frac{1}{2}$ in das erste Glied; es genügt dann zu zeigen, dass der resultirende Ausdruck die Eigenschaft besitzt sein Zeichen ohne seinen Werth zu ändern, wenn man darin Δx in $-\Delta x$ verwandelt; oder mit anderen Worten, dass man identisch hat

$$\frac{1}{e^{\Delta x}-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{e^{-\Delta x}-1} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\Delta x}}{e^{\Delta x}-1} - \frac{1}{2};$$

was sich unmittelbar verificirt.

Man hat also

$$B = 0, \quad D = 0, \quad F = 0, \ldots .$$

Nachher wird man finden

$$A = \frac{1}{12}, \quad C = -\frac{1}{720}, \ldots,$$

und folglich

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum u = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} u\,dx - \frac{u - u_0}{2} + \frac{\Delta x}{12}\left[\frac{du}{dx} - \left(\frac{du}{dx}\right)_0\right] \\ - \frac{\Delta x^3}{720}\left[\frac{d^3 u}{dx^3} - \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0\right] + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Die numerischen Coëfficienten, welche $\frac{\Delta x}{2}$, $\frac{\Delta x^3}{2.3.4}$, $\frac{\Delta x^5}{2.3.4.5.6}$, etc. multipliciren, werden die Bernoulli'schen Zahlen genannt. Ihre Werthe sind

$$B_1 = \frac{1}{6}, \; B_3 = \frac{1}{30}, \; B_5 = \frac{1}{42}, \; B_7 = \frac{1}{30}, \; B_9 = \frac{5}{66}, \text{ etc.}$$

Die Formel für B_{2p-1} ist ziemlich complicirt.

Von diesen Zahlen Gebrauch machend, wird die Formel (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum u = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x} u\,dx - \frac{u - u_0}{2} + B_1 \frac{\Delta x}{1.2}\left[\frac{du}{dx} - \left(\frac{du}{dx}\right)_0\right] \\ - B_3 \frac{\Delta x^3}{1.2.3.4}\left[\frac{d^3 u}{dx^3} - \left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_0\right] + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Summation der Reihen.

228. Wenn man die Folge von Werthen betrachtet, welche eine Function u von x annimmt, wenn x um gleiche Incremente wächst, von einem gewissen Werthe an bis zu einem anderen, so hat man eine Reihe, deren Differenz die Function u sein

wird, in welcher man dem x seinen letzten Werth vermehrt um Δx giebt.

In der That, setzen wir

$$x = n\Delta x, \quad \text{und} \quad S u_n = u + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

wo das erste Glied u mit $x = 0$ correspondirt.

Wenn man x um Δx vermehrt, so wächst n um 1, und die Reihe wächst um u_{n+1}; sie ist also enthalten in dem allgemeinen Ausdruck von Σu_{n+1}, und man hat

$$S u_n = \Sigma u_{n+1} + c, \quad \text{oder} \quad S u_n = \Sigma u_n + u_n + c,$$

wo die willkürliche Constante zu bestimmen ist durch die Bedingung, dass die beiden Glieder gleich seien für einen gewissen Werth von n.

Wenn man die Zuwachse der Variable gleich der Einheit voraussetzt, was man immer durch eine Vertauschung der Variable bewirken kann, so hat man

$$S u_x = \Sigma u_x + u_x + c = \Sigma u_{x+1} + c.$$

Wenden wir diese Formel an zur Auffindung der Summe einiger Reihen.

229. Setzen wir zunächst $u_x = x^m$ voraus, d. h. suchen wir die Summe der $m$ten Potenzen der ganzen Zahlen von 0 bis zu x; man findet, indem man Gebrauch macht von der Formel, welche wir für Σx^m gegeben haben, und berücksichtigt dass die Constante gleich Null zu setzen ist,

$$S x = 1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x = \frac{x(x+1)}{1.2},$$

$$S x^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + x^2 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1.2.3},$$

$$S x^3 = 1 + 8 + 27 + \ldots + x^3 = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2 = \frac{x^2 (x+1)^2}{4},$$

$$S x^4 = 1 + 16 + 81 + \ldots + x^4 = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x,$$

$$S x^5 = 1 + 32 + 243 + \ldots + x^5 = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{5}{12} x^4 - \frac{1}{12} x^2.$$

230. Wir fanden im Vorhergehenden

$$\Delta . x(x + \Delta x) \ldots [x + (n-1)\Delta x]$$
$$= (x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \ldots [x + (n-1)\Delta x] n \Delta x.$$

Also, indem man n in $n + 1$ verwandelt,

$$\sum (x + \varDelta x)(x + 2\varDelta x)\ldots(x + n\varDelta x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)\varDelta x} \cdot x(x + \varDelta x)\ldots(x + n\varDelta x) + c.$$

Betrachtet man ferner die früher gefundene Formel

$$\varDelta \frac{1}{x(x+\varDelta x)\ldots[x+(n-2)\varDelta x]} = \frac{-(n-1)\varDelta x}{x(x+\varDelta x)\ldots[x+(n-1)\varDelta x]},$$

so hat man integrirend

$$\sum \frac{1}{x(x+\varDelta x)\ldots[x+(n-1)\varDelta x]}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\varDelta x} \cdot \frac{1}{x(x+\varDelta x)\ldots[x+(n-2)\varDelta x]} + c.$$

Hiernach ist es leicht die Reihen zu summiren, deren allgemeine Glieder die eben integrirten Ausdrücke sind, und man erhält die folgenden Formeln

$$S(x+1)(x+2)\ldots(x+n) = \Sigma(x+2)(x+3)\ldots(x+n+1) + c$$

$$= \frac{1}{n+1}(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1),$$

$$S\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} = \sum \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+n+1)} + c$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots(n-2)(n-1)^2} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+2)(x+3)\ldots(x+n)},$$

indem man voraussetzt dass das erste Glied von einer jeden dieser Reihen mit $x = 0$ correspondirt.

231. Gehen wir über zu den transcendenten Functionen, und suchen wir zunächst Sa^x.

Wir fanden

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^{\varDelta x} - 1},$$

und man hat

$$Sa^x = \Sigma a^{x+\varDelta x} + c;$$

also

$$Sa^x = \frac{a^{x+\varDelta x}}{a^{\varDelta x} - 1} + c.$$

Wenn das erste Glied der Reihe mit $x = 0$ correspondirt, so hat man

$$1 = \frac{a^{\varDelta x}}{a^{\varDelta x} - 1} + c, \text{ woraus } c = -\frac{1}{a^{\varDelta x} - 1}.$$

232. Bestimmen wir noch $S\sin(ax+b)$, $S\cos(ax+b)$. Man hat

$$S\sin(ax+b) = \Sigma\sin(ax + a\Delta x + b) + c$$
$$= -\frac{1}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}\cos\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right) + c,$$

$$S\cos(ax+b) = \Sigma\cos(ax + a\Delta x + b) + c$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}\sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right) + c.$$

Wenn die Reihen mit $x = 0$ anfangen sollen, so findet man für die erste

$$c = \frac{\cos\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}},$$

und für die zweite

$$c = -\frac{\sin\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}};$$

und folglich

$$S\sin(ax+b) = \frac{\cos\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right) - \cos\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{ax + a\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{ax}{2} + b\right)}{\sin\frac{a\Delta x}{2}},$$

$$S\cos(ax+b) = \frac{\sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right) - \sin\left(b - \frac{a\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{a\Delta x}{2}}$$
$$= \frac{\sin\left(\frac{ax + a\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{ax}{2} + b\right)}{\sin\frac{a\Delta x}{2}}.$$

Formeln zum Interpoliren.

233. Wenn man eine gewisse Anzahl Werthe einer Function kennt, welche gegebenen Werthen der Variable x entsprechen, und wenn man diejenigen bestimmen will, welche sich auf zwischenliegende Werthe von x beziehen, so heisst die dahin führende Operation Interpoliren. Man will im Allgemeinen nicht genaue Werthe haben, sondern so einfach als möglich Werthe erhalten, welche einen hinreichenden Grad von Annäherung besitzen.

In Nr. 226 fanden wir die Formel

$$(1)\quad \begin{cases} u_x = u + \frac{x}{\Delta x}\Delta u + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u \\ \quad + \frac{\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x}-1\right)\left(\frac{x}{\Delta x}-2\right)}{1.2.3}\Delta^3 u + \cdots; \end{cases}$$

u bezeichnet den Werth der Function für $x=0$, und die Werthe von x wachsen durch constante mit Δx gleiche Intervalle. Diese Reihe schliesst mit $\Delta^n u$, wenn die Differenz der $n$ten Ordnung constant ist.

Wenn man nun die Werthe $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$ und folglich $u, \Delta u, \Delta^2 u, \ldots, \Delta^n u$ giebt, so kann man die Aufgabe stellen die Function u_x nach der Bedingung zu finden, dass sie die besonderen Werthe $u, u_1, \ldots, u_n$ reproduciren soll, wenn man dem x die Werthe $0, \Delta x, \ldots, n\Delta x$ beilegt, und dass überdies ihre $n$te Differenz constant sein soll, wodurch sich die Formel vereinfacht.

Die mit $\Delta^n u$ abgebrochene Formel (1) giebt nun für u_x eine Function vom Grade n in x, welche den verlangten Bedingungen genügt. Und wenn man sie als genau betrachtet, so liefert sie die Werthe von u_x, welche einem willkürlichen Werthe von x entsprechen. Aber es ist rathsam sie nur für Werthe zwischen 0 und $n\Delta x$ anzuwenden, wenigstens wenn man nicht weiss, dass die Differenzen der höheren Ordnungen als n ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können.

Wenn der erste Werth u der Function mit $x = x_0$ und

nicht mit $x = 0$ correspondirte, so müsste man in der Formel (1) x durch $x - x_0$ ersetzen.

234. Wenn man $u, \Delta u, \ldots, \Delta^n u$ kennt, und wenn $\Delta^n u$ constant ist, so bildet man jeden der verschiedenen Werthe von $\Delta^{n-1} u$, indem man $\Delta^n u$ zu dem vorhergehenden addirt. Ebenso erhält man jeden der Werthe von $\Delta^{n-2} u$, indem man zu dem vorhergehenden seine Differenz addirt, und so weiter bis zu den verschiedenen Werthen von u, von dem ersten an bis ins Unendliche.

Dieses Verfahren wird angewandt zur Construction der Tafeln, sei es nach einer gewissen Anzahl von bekannten Gliedern, zwischen welche man andere einschalten will, sei es nach einer genauen aber zur Anwendung unbequemen Gleichung.

235. Wie nahe auch die consecutiven Glieder einer Tafel liegen mögen, oft hat man nöthig zwischenliegende zu betrachten, und man kann in den meisten Fällen die zweiten Differenzen gleich Null nehmen. In diesem Falle, wo man den Werth von x zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ voraussetzt, giebt die Formel (1), indem man darin x mit $x - x_0$ vertauscht,

$$u_x = u + \frac{x - x_0}{\Delta x} \Delta u.$$

Wenn u_x gegeben und x die Unbekannte wäre, so würde man hieraus ziehen

$$x = x_0 + \frac{u_x - u}{\Delta u} \Delta x.$$

Kann man nur die dritten Differenzen vernachlässigen, so nimmt man ein Glied mehr in der Formel (1). In diesem Falle würde die Formel nicht ebenso leicht x zu u_x geben, weil die Gleichung in x vom zweiten Grade ist; die Schwierigkeit würde noch viel grösser werden, wenn man eine grössere Anzahl von Gliedern nähme. Man wendet dann ein sehr bekanntes Approximationsverfahren an: man vernachlässigt zuerst die Glieder welche $x - x_0$ in höheren Potenzen als der ersten enthalten, was, wie in dem ersten Falle, $x - x_0 = \frac{u_x - u}{\Delta u} \Delta x$ giebt; darauf substituirt man diesen angenäherten Werth in dem Coëfficienten der ersten Potenz von $x - x_0$, welche man als Factor aller vernachlässigten Glieder herausgesetzt hat, und man erhält einen genaueren

Werth von $x - x_0$, den man in derselben Weise substituirt; und so weiter.

Man könnte den Werth von $x - x_0$ auch finden, indem man sich aller Glieder bediente, worin diese Grösse vorkommt, sie aber in jedem Gliede nur einmal als unbekannt betrachtete; dieses Verfahren würde man öfter wiederholen, und einen Grad der Genauigkeit von derselben Ordnung wie durch das andere Verfahren erhalten.

236. Die Formel (1) setzt voraus, dass die Werthe von x durch gleiche Intervalle wachsen, was nicht immer der Fall ist. Wir wollen eine Formel angeben, welche den Werth der Function giebt, wenn man die Werthe $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ kennt, welche sie annimmt, wenn x die willkürlichen Werthe hat

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Wir nehmen wieder eine ganze und rationale Function von x vom Grade n; sie enthält $n+1$ unbestimmte Coëfficienten, und man kann sie folglich den $n+1$ gegebenen Bedingungen unterwerfen.

Es sei also

$$u_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \mu x^n,$$

man hat

$$u_0 = \alpha + \beta x_0 + \gamma x_0^2 + \cdots + \mu x_0^n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = \alpha + \beta x_n + \gamma x_n^2 + \cdots + \mu x_n^n.$$

Nach der Theorie der Gleichungen ersten Grades enthalten die Werthe von $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ als Factoren ihrer verschiedenen Glieder $u_0, u_1 \ldots, u_n$, so dass man u_x unter die Form bringen kann

$$u_x = X u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 \cdots + X_n u_n.$$

Für $x = x_0$ reducirt sich u_x auf u_0; dieser Bedingung wird genügt, wenn X dann gleich 1 wird und wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Null werden, d. h. wenn sie theilbar sind durch $x - x_0$. Ebenso würde es sich verhalten für jeden der anderen Werthe von x; man wird also für X das Product einer Constante mit den Factoren $x - x_0, x - x_1, \ldots, x - x_n$, ausgenommen $x - x_0$, nehmen; für X_1 das Product einer anderen Constante mit denselben Factoren, ausgenommen $x - x_1$; und so fort. Wenn man nun jeden der Werthe von x substituirt, so wird

nur das Glied übrig bleiben, worin der entsprechende Werth von u_x vorkommt; und es erübrigt nur seinen Coëfficienten der Einheit gleich zu machen. Es sei x_p irgend einer der gegebenen Werthe von x, und u_p der entsprechende Werth von u_x.

Da X_p die Factoren $x - x_0, \ldots, x - x_n$, ausgenommen $x - x_p$ enthält, so ist evident, dass wenn man X_p gleich diesem Product nimmt, getheilt durch den Werth, welchen dasselbe Product annimmt, wenn man darin $x = x_p$ macht, X_p sich auf 1 reducirt für $x = x_p$.

Die Grössen $X, X_1, \ldots, X_n$ sind somit so bestimmt, dass der Gleichung vom Grade n in x, welche den Werth von u_x giebt, genügt wird durch die $n + 1$ Paare gegebener Werthe, und kein anderer Ausdruck von demselben Grade könnte denselben Werthen $u_0, \ldots, u_n$ gleich werden für die nämlichen Werthe von x, ohne mit diesem zusammenzufallen.

Die gesuchte Formel ist also

$$(2)\left\{\begin{aligned} u_x &= u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \\ &+ u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} + \cdots + u_n \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned}\right.$$

Approximation der Quadraturen, Cubaturen und Rectificationen.

237. Alle diese Aufgaben kommen, wie wir sahen, zurück auf eine oder mehrere Integrationen in Bezug auf eine Variable, zwischen bestimmten Grenzen. Es genügt also das Integral $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ zu betrachten.

Um seinen Werth zu bestimmen kann man die Formel (1) der Nr. 227 nehmen, welche giebt, indem man δ statt Δx schreibt und $u = f(x)$ voraussetzt,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \delta\left(\Sigma u + \frac{u - u_0}{2}\right) - \frac{\delta^2}{12}\left[f'(x) - f'(x_0)\right]$$
$$+ \frac{\delta^4}{720}\left[f'''(x) - f'''(x_0)\right] + \cdots$$

Wenn man δ klein genug voraussetzt um δ^2 vernachlässigen zu können, so hat man einfach

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \left(\frac{u_0}{2} + u_1 + u_2 + \cdots + \frac{u}{2}\right)\delta.$$

Betrachtet man $f(x)$ als die Ordinate einer Curve, so ist dieser letzte Ausdruck die Summe der Trapeze zwischen den successiven Ordinaten, den Sehnen der Curve und der Axe der x.

238. Man kann auch die Interpolationsformel (1) der Nr. 233 anwenden, um die Ordinate der Curve darzustellen, und sie dann zwischen den gegebenen Grenzen integriren; was keine Schwierigkeit darbietet, weil dieser Ausdruck ganz und rational ist.

Die Anwendung dieser Formel kommt darauf zurück, die Curve um welche es sich handelt zu ersetzen durch eine Parabel vom Grade $n-1$, welche n gemeinschaftliche Punkte mit jener hat.

Anstatt diese letztere Curve zu nehmen, betrachtet man bisweilen eine Folge von Parabeln zweiten Grades, von welchen jede durch drei der gegebenen Punkte geht, und man ersetzt die correspondirenden Theile der gesuchten Fläche durch die Flächen dieser verschiedenen Parabeln zwischen den jedesmaligen zwei extremen Ordinaten. Hierzu wird erfordert, dass das Intervall $b-a$ in eine gerade Zahl von Theilen getheilt sei; und jede Parabel giebt die Fläche, welche zur Basis zwei dieser consecutiven Theile hat.

Die Gleichung der Parabel zweiten Grades, welche durch die Punkte geht, deren Abscissen 0, Δx, $2\Delta x$, und deren Ordinaten y_0, y_1, y_2 sind, ist

$$y = y_0 + \frac{x}{\Delta x}\Delta y_0 + \frac{1}{2}\frac{x}{\Delta x}\left(\frac{x}{\Delta x} - 1\right)\Delta^2 y_0;$$

ihre Fläche zwischen den Ordinaten y_0, y_2 ist

$$\Delta x\left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 y_0\right),$$

oder

$$\frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Ebenso findet man die Fläche zwischen y_2 und y_4, zwischen y_4 und y_6, und endlich zwischen y_{2n-2} und y_{2n}; und man muss die Summe der folgenden Ausdrücke bilden, in welchen y_0, $y_1, \ldots, y_{2n}$ die Werthe von $f(x)$ bezeichnen, welche sich beziehen auf a, $a + \varDelta x, \ldots$ und b oder $a + n\varDelta x$:

$$\frac{\varDelta x}{3}\left(y_0 \quad + 4y_1 \quad + y_2\right),$$

$$\frac{\varDelta x}{3}\left(y_2 \quad + 4y_3 \quad + y_4\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\varDelta x}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right).$$

Die gesuchte Fläche, oder das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ hat somit zum genäherten Werth

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\varDelta x}{3}\left(y_0 + y_{2n}\right) + \frac{2\varDelta x}{3}\left(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}\right) + \frac{4\varDelta x}{3}\left(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}\right).$$

Krümmung der Flächen.

239. Da eine Fläche im Allgemeinen keinen Contact der zweiten Ordnung mit einer Kugel haben kann, so kann man die Krümmung der Flächen nicht auf die der Kugel beziehen, wie man die Krümmung der Linien auf die des Kreises bezogen hat. Um die Krümmung einer Fläche in einem ihrer Punkte kennen zu lernen, besteht eines von den Mitteln, die man anwendet, darin, dass man in dieser Fläche Schnitte macht durch Ebenen, welche durch den betrachteten Punkt gehen, und dass man die Krümmung der so erhaltenen Linien bestimmt. Die Schnitte, welche zu untersuchen am natürlichsten erscheint, sind diejenigen welche durch normale Ebenen zu der Fläche gemacht werden: mit ihnen werden wir anfangen; nachher werden wir sehen, wie ihre Krümmung unmittelbar die der anderen bestimmt.

Es sei $z = F(x, y)$ die Gleichung der Fläche; wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass die Tangentialebene in dem Punkt, den man betrachtet, zur Ebene der x und y, und die Normale zur Axe der z gewählt sei; die von den Axen unabhängigen Eigenschaften, welche wir so entdecken werden, haben denselben Grad von Allgemeinheit, wie wenn das Axensystem jedes andere gewesen wäre.

Ein Kreis, der in einer durch die Axe der z gehenden Ebene liegt, und im Coordinatenanfang den durch diese Ebene in der Oberfläche gemachten Schnitt tangirt, hat zu Gleichungen

$$y = mx, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0;$$

woraus

$$x^2(1 + m^2) + z^2 - 2Rz = 0.$$

Damit ein Contact der zweiten Ordnung mit dem Schnitte stattfinde, so muss $\frac{d^2 z}{d x^2}$ denselben Werth haben in der einen und anderen Curve. Aber die letzte Gleichung zweimal differentiirt giebt

$$1 + m^2 + (z - R)\frac{d^2 z}{d x^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0.$$

Im Anfangspunkt hat man

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0;$$

woraus hervorgeht

$$1 + m^2 - R\frac{d^2 z}{d x^2} = 0, \quad R = \frac{1 + m^2}{\frac{d^2 z}{d x^2}},$$

wo $\frac{d^2 z}{d x^2}$ keine partielle Ableitung ist. Um den Werth davon zu erhalten, muss man y durch mx in der Gleichung der Oberfläche ersetzen, dann zweimal in Bezug auf x differentiiren und x, y, z Null setzen: man findet so zum Werthe der totalen Ableitung $\frac{d^2 z}{d x^2}$

$$r + 2sm + tm^2,$$

wo r, s, t respective die partiellen Ableitungen bezeichnen

$$\frac{d^2 z}{d x^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx\, dy}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Der Krümmungsradius R des Normalschnittes hat also zum Ausdruck

$$(1) \qquad R = \frac{1 + m^2}{r + 2sm + tm^2}.$$

Er bleibt immer endlich und von demselben Zeichen, wenn man hat $s^2 - rt < 0$: die Krümmung ist dann immer in demselben Sinne. Er wird unendlich und ändert sein Zeichen, wenn $s^2 - rt > 0$; die Krümmung ändert dann ihren Sinn. Wenn $s^2 - rt = 0$, so wird er unendlich ohne sein Zeichen zu ändern.

240. Wenn man das Maximum und Minimum dieses Ausdrucks in Bezug auf die Variable m sucht, so wird man den grössten und kleinsten Krümmungsradius der Normalschnitte kennen. Die Gleichung, welche diese besonderen Werthe bestimmt, ist

$$sm^2 + (r - t)\, m - s = 0. \tag{2}$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind reell und von entgegengesetzten Zeichen; in der zweiten Ableitung von R substituirt, geben sie Resultate von verschiedenen Zeichen, und entsprechen folglich, die eine einem algebraischen Maximum, die andere einem algebraischen Minimum.

Da das Product dieser beiden Wurzeln -1 ist, so sind die Ebenen, welche die Schnitte der kleinsten und grössten Krümmung enthalten, die wir Hauptschnitte nennen werden, senkrecht zu einander.

241. Wenn man diese beiden Ebenen zu Ebenen der x, z und der y, z nimmt, so vereinfacht sich der allgemeine Ausdruck von R. Denn, da die beiden Wurzeln der Gleichung (2) dann 0 und ∞ sein müssen, so muss man $s = 0$ haben, und folglich

$$R = \frac{1 + m^2}{r + tm^2}.$$

In dem gegenwärtigen Falle würden zwei Werthe von R genügen zur Bestimmung von r und t; somit bestimmen, wenn man die Richtung der Hauptschnitte kennt, die Krümmungen zweier beliebigen Normalschnitte von bekannter Lage alle anderen.

Bezeichnet man durch ϱ, ϱ' den grössten und kleinsten Radius, so hat man

$$\varrho = \frac{1}{r}, \quad \varrho' = \frac{1}{t}.$$

Man kann daher R ausdrücken als Function von ϱ, ϱ', m, und man erhält so

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{1 + m^2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{m^2}{\varrho'}\right),$$

oder $m = tang\, \alpha$ setzend,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho} \cos \alpha^2 + \frac{1}{\varrho'} \sin \alpha^2.$$

Wenn man durch v die Krümmung irgend eines Schnittes, und durch v', v'' diejenigen der Hauptschnitte bezeichnet, so sind sie respective gleich mit $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho'}$, wie wir in der Differentialrechung sahen, und die vorstehende Gleichung wird

(3) $$v = v' \cos\alpha^2 + v'' \sin\alpha^2,$$

woraus man sieht, dass die beiden Hauptkrümmungen diejenigen aller Normalschnitte bestimmen.

Aus dieser Gleichung ergeben sich mehrere wichtige Folgerungen:

1. Wenn man durch die Normale zwei Ebenen legt, welche gegen die Ebene eines Hauptschnittes gleich geneigt sind, so ist die Krümmung der beiden Schnitte dieselbe.

2. Wenn man zwei Ebenen führt, welche gleich geneigt sind gegen die respectiven Ebenen der zwei Hauptschnitte, auf welcher Seite es auch sei, so ist die Summe der Krümmungen dieser Schnitte constant und gleich der Summe der Krümmungen der Hauptschnitte.

Denn, indem man sie durch v und v_1 bezeichnet, hat man

$$v = v' \cos\alpha^2 + v'' \sin\alpha^2, \qquad v_1 = v' \sin\alpha^2 + v'' \cos\alpha^2,$$

also

$$v + v_1 = v' + v''.$$

Wenn die beiden Winkel α in demselben Sinne genommen werden, so sind die Ebenen rechtwinklig: woraus man sieht, dass die Summe der Krümmungen zweier zu einander rechtwinkligen Normalschnitte constant ist.

3. Wenn man $\alpha = \frac{\pi}{4}$ macht, so hat man $v = \frac{v' + v''}{2}$. Also ist die Krümmung eines jeden der beiden Schnitte, deren Ebenen die Winkel der Hauptschnittsebenen hälften, gleich dem Mittel zwischen den beiden Hauptkrümmungen; und die Kugel, welche durch die osculirenden Kreise dieser Schnitte geht, giebt für die Krümmungen zweier rechtwinkligen Normalschnitte dieselbe Summe wie die Oberfläche. Man sieht noch dass zwei Ebenen, welche gleich geneigt sind gegen eine dieser Mittelebenen, Schnitte geben, deren Summe der Krümmungen $v' + v''$ ist, weil diese Ebenen gleiche Winkel machen mit den Hauptschnittsebenen.

242. Anzeigende Curve. — Wenn man von irgend einem Punkte einer Oberfläche an, auf der Normale eine unendlich kleine Länge nimmt, und durch ihren Endpunkt eine zur Normale senkrechte Ebene führt, so schneidet sie die Oberfläche in einer unendlich kleinen Curve, welche Dupin zuerst betrachtet und anzeigende Curve (Indicatrix) genannt hat. Alle die Eigenschaften, welche wir zuvor bewiesen haben, ergeben sich aus ihr sehr einfach, sowie viele andere, wegen deren wir auf die Werke desselben verweisen. Man sieht zunächst leicht, dass diese Curve vom zweiten Grade ist, wenn man die in Bezug auf ihre Dimensionen unendlich kleinen Grössen vernachlässigt; was bedeutet, dass wenn diese Curve gegen einen Punkt convergirt, indem ihre Ebene sich der Tangentialebene nähert, eine ihr ähnliche endliche Curve zur Grenze einen Kegelschnitt haben würde.

In der That, wenn man die Normale zur Axe der z nimmt, so ist die Gleichung der Oberfläche, bezogen auf rechtwinklige Axen, allgemein

$$z = \frac{1}{2} r x^2 + s x y + \frac{1}{2} t y^2 + \cdots,$$

und bekanntlich kann man in der Ebene der x, y zwei solche besondere rechtwinklige Axen wählen, dass das Rechteck xy in dem zweiten Gliede fehlt. Indem man sie wählt, wird die Gleichung der Oberfläche von der Form sein

$$z = \frac{1}{2} r x^2 + \frac{1}{2} t y^2 + \cdots.$$

Man weiss noch dass wenn die Coëfficienten r, t ungleich sind, es nur ein einziges System rechtwinkliger Axen giebt, welches die Eigenschaft besitzt das Rechteck xy verschwinden zu machen; und dass wenn sie gleich sind, es unendlich viele derselben giebt.

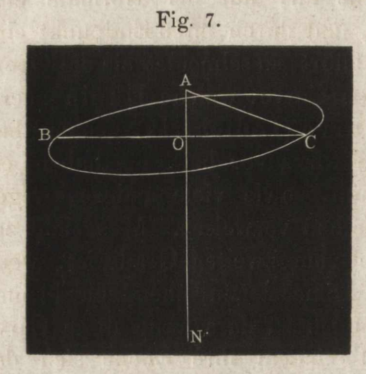
Wenn man jetzt $z = \alpha$, wo α unendlich klein, macht, und wenn man sich auf die Glieder vom zweiten Grade in x und y beschränkt, so hat man zur Gleichung des Schnittes, welcher die anzeigende Curve ist,

(1) $$r x^2 + t y^2 = 2 \alpha,$$

welche Gleichung eine Ellipse oder eine Hyperbel darstellt, deren Mittelpunkt auf der Normale liegt.

Es sei A der Punkt der Oberfläche, AN die Normale, $AO = \alpha$, und BC der Durchschnitt der Ebene der Indicatrix mit irgend einer Normalebene. Der Krümmungsmittelpunkt dieses Normalschnittes ist die Grenze des Durchschnitts von AN mit der in der Mitte der Sehne AC errichteten Senkrechte; und wenn man den Krümmungsradius R nennt, so hat man $R = \frac{\overline{OC}^2}{2OA}$, oder mit 2λ den Durchmesser BC der Indicatrix, welche wir elliptisch voraussetzen, bezeichnend, $R = \frac{\lambda^2}{2\alpha}$.

Fig. 7.



Man schliesst hieraus dass die Schnitte, deren Ebenen durch die Axen der Indicatrix gehen, die grösste und die kleinste Krümmung haben. Alle anderen Folgerungen ergeben sich leicht, und man erhält denselben Ausdruck von R als Function von r und t für irgend eine Ebene $y = mx$ wie zuvor: denn man hat

$$\lambda^2 = \frac{2\alpha(1 + m^2)}{r + tm^2}, \text{ und folglich } R = \frac{1 + m^2}{r + tm^2}.$$

Wenn die Indicatrix eine Hyperbel wäre, so würde der Krümmungsradius unendlich werden, wenn die Ebene des Schnittes durch eine ihrer Asymptoten ginge, und würde nachher einen negativen Ausdruck haben, wenn man nicht das Zeichen von α änderte. Man muss also, um ihn positiv zu haben, die Ebene der Indicatrix auf der anderen Seite der Tangentialebene führen; welches zeigt dass die Krümmung der Schnitte ihren Sinn geändert hat. Die beiden anzeigenden Curven, welche man so erhält, sind zwei conjugirte Hyperbeln, und ihre reellen Axen entsprechen den Schnitten der grössten Krümmung unter allen denjenigen, welche auf derselben Seite der Tangentialebene liegen.

Behält man das Zeichen des Ausdrucks der Krümmung

bei, so wird man, wie wir dies allgemein sagten, ein Maximum und ein Minimum als Hauptkrümmungen haben.

Die Indicatrix kann noch von der Gattung der Parabel sein, welche den Fall zweier parallelen Geraden einbegreift: dieser letztere Fall ereignet sich, wenn man hat

$$r = 0 \text{ oder } t = 0.$$

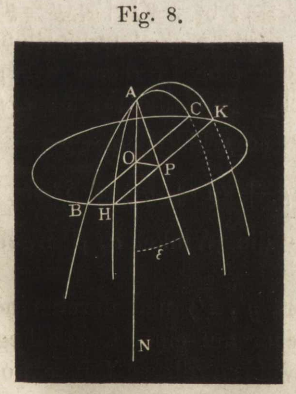
Dies bedeutet nicht dass der Schnitt der Oberfläche mit der zur Tangentialebene parallelen Ebene keine Parabel ist; denn eine Parabel mit unendlich kleinem Parameter in endlicher Entfernung von ihrem Scheitel betrachtet, fällt nahezu mit zwei parallelen Geraden zusammen. Also, selbst wenn der Schnitt eine Parabel wäre, so würde die Indicatrix sich als zwei gerade Linien darbieten, ausgenommen in dem Falle wo der Scheitel dieser Parabel in einer unendlich kleinen Entfernung liegen würde von dem Punkt, den man auf der Oberfläche betrachtet: dieser Fall kann nur ausnahmsweise sein, weil er nicht stattfindet unter der gewöhnlichsten Voraussetzung, wo die Gleichung der Fläche entwickelt werden kann, wie wir annahmen.

Wenn die Indicatrix von der Gattung der Parabel ist, so giebt es nur eine Richtung, für welche die Krümmung Null, oder der Radius unendlich wird; nämlich diejenige der Axe der Parabel.

Diese Richtung ist die der kleinsten Krümmung; die grösste Krümmung ist in der darauf senkrechten Richtung.

243. Die Krümmung der schiefen Schnitte führt sich auf diejenige der Normalschnitte zurück. In der That, es sei HK der Durchschnitt der Ebene der Indicatrix mit einer Ebene, welche geht durch die Tangente in A an dem Normalschnitte BAC, und einen Winkel ε mit der Ebene dieses Schnittes macht. Da die Sehne HK parallel ist zu der in A geführten gemeinschaftlichen Tangente, so theilt die aus A auf KH gefällte Senkrechte AP diese Linie in zwei Theile, die man als gleich betrachtet, weil sie

Fig. 8.



sich nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung unterscheiden; OP ist senkrecht zu HK, und von der zweiten Ordnung wie AO, weil $\frac{OP}{OA} = tang\,\varepsilon$. Man kann daher die Längen BC, HK als gleich betrachten; und der Krümmungsradius des Schnittes HAK, welcher zum Werthe hat $\frac{\overline{PK}^2}{2AP}$, ist gleich mit $\frac{\overline{OC}^2}{2PA}$; er ist also gleich demjenigen des Normalschnittes BAC multiplicirt mit $\frac{AO}{PA}$ oder $cos\,\varepsilon$. Woraus man den von Meunier herrührenden wichtigen Satz folgert, dass der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes erhalten wird, indem man auf die Ebene dieses Schnittes projicirt den Krümmungsradius des Normalschnittes, welcher dieselbe Tangente hat.

244. Die besondere Lage, welche wir den Axen gaben, hat den Beweis der vorhergehenden Eigenschaften erleichtert; aber es ist nothwendig die Aufgabe für eine beliebige Lage der Axen zu behandeln, weil man die Hauptschnitte in irgend einem Punkte einer auf irgend welche rechtwinklige Axen bezogenen Oberfläche kann zu bestimmen haben.

Es seien x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punktes einer gegebenen Fläche, und α, β, γ die Winkel, welche eine Tangente an der Oberfläche in diesem Punkte mit den Axen bildet, so hat man $cos\,\gamma = p\,cos\,\alpha + q\,cos\,\beta$, weil die Gleichung der Tangentialebene ist $z - z' = p\,(x - x') + q\,(y - y')$, und weil die Differenzen $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ proportional sind den Cosinus der Winkel, welche eine in dieser Ebene liegende Gerade mit den Axen macht. Substituirt man $cos\,\gamma$ seinen Werth $\sqrt{1 - cos\,\alpha^2 - cos\,\beta^2}$, so erhält man

$$(1) \quad (1 + p^2)\,cos\,\alpha^2 + 2\,p\,q\,cos\,\alpha\,cos\,\beta + (1 + q^2)\,cos\,\beta^2 = 1.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass die Winkel α, β irgend einer Tangente angehören.

Wenn man durch den Punkt (x', y', z') und durch einen anderen unendlich nahen Punkt, welcher auf einer Curve liegt, die zu dieser Tangente gehört, zwei zu dieser Curve normale Ebenen führt, so schneiden sie sich nach der Axe des

osculirenden Kreises dieser Curve, und die Gleichungen dieser Gerade sind

$$(x - x')\, dx' + (y - y')\, dy' + (z - z')\, dz' = 0,$$
$$(x - x')\, d^2 x' + (y - y')\, d^2 y' + (z - z')\, d^2 z' = ds'^2.$$

Diese Linie, da sie in einer Normalebene der Oberfläche liegt, trifft die Normale, deren Gleichungen sind

$$x - x' + p(z - z') = 0, \quad y - y' + q(z - z') = 0.$$

Die Coordinaten x, y, z des Durchschnittspunktes werden gegeben durch die Gleichungen

$$z - z' = \frac{1}{D}, \quad y - y' = -\frac{q}{D}, \quad x - x' = -\frac{p}{D},$$

indem man setzt

$$d^2 z' - p\, d^2 x' - q\, d^2 y' = D\, ds'^2.$$

Man kann den Werth von D transformiren, indem man die Gleichung

$$dz' = p\, dx' + q\, dy'$$

differentiirt, welches giebt

$$d^2 z' = p\, d^2 x' + q\, d^2 y' + r\, dx'^2 + 2s\, dx'\, dy' + t\, dy'^2,$$

und folglich

$$D = r\left(\frac{dx'}{ds'}\right)^2 + 2s \frac{dx'}{ds'} \cdot \frac{dy'}{ds'} + t\left(\frac{dy'}{ds'}\right)^2$$
$$= r \cos\alpha^2 + 2s \cos\alpha \cos\beta + t \cos\beta^2.$$

Man sieht hieraus, dass D dasselbe bleibt, wenn α und β sich nicht ändern; folglich treffen die Axen der osculirenden Kreise aller schiefen Schnitte, deren Ebenen durch dieselbe Tangente gehen, die Normale in einem und demselben Punkt.

Hieraus geht hervor, dass alle diese Schnitte ihre Krümmungsmittelpunkte auf einer Kreisperipherie haben, deren Ebene senkrecht ist zu ihrer gemeinschaftlichen Tangente, und deren Durchmesser die Linie ist, welche den Berührungspunkt verbindet mit dem festen Punkt, den wir eben auf der Normale gefunden haben. Dieser Punkt ist also selbst der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes; und man sieht dass die Krümmungsradien aller Schnitte, welche dieselbe Tangente haben, die Projectionen des Radius des Normalschnitts auf ihre respectiven Ebenen sind.

Nach den Werthen, welche wir für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes des Normalschnitts fanden, hat sein Krümmungsradius zum Ausdruck

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D},$$

oder

$$(2) \qquad R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cos\alpha^2 + 2 s \cos\alpha \cos\beta + t \cos\beta^2}.$$

245. Das auf die Aenderung von α und β bezügliche Maximum oder Minimum von R entspricht dem Minimum oder dem Maximum des Nenners, und wird gegeben durch die Gleichung

$$(r \cos\alpha + s \cos\beta)\, d.\cos\alpha = -\,(s \cos\alpha + t \cos\beta)\, d.\cos\beta;$$

man eliminirt $d.\cos\alpha$ und $d.\cos\beta$, indem man die Gleichung (1) differentiirt, welches giebt

$$[(1 + p^2) \cos\alpha + p q \cos\beta]\, d.\cos\alpha$$
$$= -\,[(1 + q^2) \cos\beta + p q \cos\alpha]\, d.\cos\beta,$$

und diese beiden Gleichungen durch einander dividirend, kommt

$$(3) \qquad \frac{r \cos\alpha + s \cos\beta}{(1 + p^2) \cos\alpha + p q \cos\beta} = \frac{t \cos\beta + s \cos\alpha}{(1 + q^2) \cos\beta + p q \cos\alpha}.$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) bestimmen die Werthe von α, β, R, welche sich auf die Hauptschnitte beziehen.

Um diese Rechnung bequemer auszuführen, multiplicirt man mit $\cos\alpha$ Zähler und Nenner des ersten Gliedes der Gleichung (3), und mit $\cos\beta$ Zähler und Nenner des zweiten Gliedes, und addirt die Zähler und Nenner; die resultirende Function, welche $\frac{D}{1}$ ist, ist gleich jedem der Glieder der Gleichung (3), welches giebt

$$(3 \text{ bis}) \quad \begin{cases} r \cos\alpha + s \cos\beta = D[(1 + p^2) \cos\alpha + p q \cos\beta], \\ t \cos\beta + s \cos\alpha = D[(1 + q^2) \cos\beta + p q \cos\alpha], \end{cases}$$

oder

$$(4) \quad \begin{cases} [D(1 + p^2) - r] \cos\alpha = (s - p q D) \cos\beta, \\ [D(1 + q^2) - t] \cos\beta = (s - p q D) \cos\alpha. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt geben

$$[D(1 + p^2) - r]\,[D(1 + q^2) - t] = (s - p q D)^2,$$

oder

$$(1+p^2+q^2)D^2-D[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]+rt=s^2.$$

Diese Gleichung liefert die beiden Werthe von D, welche sich auf die Hauptschnitte beziehen; und da man hat

$$R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D},$$

so ist die Gleichung, welche die Krümmungsradien dieser Schnitte giebt,

$$(5)\quad \begin{cases}(rt-s^2)R^2-R\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]\\ \qquad +(1+p^2+q^2)^2=0.\end{cases}$$

Die Werthe von α und β endlich, werden durch die Gleichung (1) und eine der Gleichungen (4) bestimmt.

246. Will man die besonderen Punkte der Oberfläche kennen, wo die Hauptschnitte und folglich alle Normalschnitte dieselbe Krümmung haben, so muss man ausdrücken, dass die beiden Wurzeln der Gleichung (5) gleich sind. Es scheint anfangs, dass die daraus resultirende Gleichung zwischen p, q, r, s, t in Verbindung mit jener der Oberfläche eine Linie bestimmen würde; aber es ist leicht zu sehen, dass die Gleichheit dieser Wurzeln zu zwei Gleichungen führt.

In der That, man kann die Bedingungsgleichung unter die Form bringen

$$\left[(1+p^2)t-(1+q^2)r+2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)\right]^2$$
$$+4(1+p^2+q^2)\left(\frac{pqr}{1+p^2}-s\right)^2=0;$$

ihr kann aber offenbar nur genügt werden, indem man setzt

$$\frac{pqr}{1+p^2}-s=0,\text{ und }(1+p^2)t-(1+q^2)r=0,$$

welche Gleichungen sich so schreiben lassen:

$$(6)\qquad \frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{s}{pq}.$$

Diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit jener der Oberfläche, bestimmen eine endliche Zahl von Punkten, welchen man den Namen Nabelpunkte gegeben hat. Man würde sie erhalten haben, indem man ausgedrückt hätte, dass die durch die Gleichungen (4) gegebenen Werthe von D

unabhängig sind von α und β, wie dies sein muss, damit die Krümmung aller Normalschnitte dieselbe sei.

247. Conjugirte Tangenten. — Wenn man auf einer Oberfläche irgend eine Curve zeichnet, und durch alle ihre Punkte Tangentialebenen an die Oberfläche legt, so bestimmen diese Ebenen durch ihre successiven Durchschnitte eine der ersten umgeschriebene abwickelbare Fläche. Ihre Kanten sind gegen die Berührungscurve nach einem merkwürdigen Gesetz geneigt, welches Dupin zuerst erkannt hat, und das wir mittheilen wollen.

Die Aufgabe, welche wir uns vorlegen, ist also diese:

Wenn der Berührungspunkt einer Tangentialebene an irgend einer Oberfläche sich nach einer gewissen Richtung verrückt, so soll man an der Grenze die Gerade finden, nach welcher diese Tangentialebene von der unendlich nahen Tangentialebene geschnitten wird. Diese beiden Geraden sind Tangenten an der Oberfläche, und Dupin hat ihnen den Namen conjugirte Tangenten gegeben.

Hierzu nehmen wir zum Anfang den Berührungspunkt der Oberfläche mit der Tangentialebene, welche man betrachtet, und nehmen in dieser die Axen der x und y; wir wählen wie in Nr. 242 zu Richtungen dieser beiden Axen diejenigen, für welche das Rechteck xy nicht vorkommt in der Entwicklung non z nach den steigenden Potenzen dieser Variablen. Wir haben dann für $x = 0$, $y = 0$ die Bedingungen

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0.$$

Es seien x', y', z' die unendlich kleinen Coordinaten des Berührungspunktes einer zweiten Tangentialebene; die Richtung, nach welcher der Berührungspunkt sich verrückt haben wird, macht mit der Axe der x einen Winkel dessen Tangente die Grenze ist von $\frac{y'}{x'}$, wenn x', y' gegen Null convergiren; wir werden diese Grenze durch m bezeichnen. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x' y' z' ist

$$z - z' = p'(x - x') + q'(y - y'),$$

und wenn man bemerkt dass man im Anfang hat

$$p = 0, \quad q = 0, \quad s = 0,$$

so folgt mit Rücksicht darauf dass x', y' unendlich klein sind,

$$p' = rx', \quad q' = ty', \quad z' = \frac{rx'^2}{2} + \frac{ty'^2}{2},$$

und die Gleichung der Ebene wird

$$z = rx'x + ty'y - \frac{rx'^2}{2} - \frac{ty'^2}{2};$$

indem man $z = 0$ macht um den Durchschnitt mit der ersten Tangentialebene, welche die der x und y ist, zu haben, kommt, y' durch mx' ersetzend und durch x' dividirend,

$$rx + tmy - \frac{x'}{2}(r + m^2 t) = 0.$$

Um die gesuchte Gerade zu haben, braucht man nur $x' = 0$ zu machen in dieser Gleichung, und es kommt

(7) $$rx + tmy = 0$$

als Gleichung der Tangente, welche conjugirt ist zu derjenigen, deren Richtung durch m bestimmt wird. Wenn man also durch m' die Tangente des Winkels bezeichnet, den diese Gerade mit der Axe der x macht, so hat man

$$m' = -\frac{r}{tm};$$

daher

$$mm' = -\frac{r}{t}.$$

Man sieht also, dass die Richtungen von irgend zwei conjugirten Tangenten diejenigen sind von zwei conjugirten Durchmessern des Kegelschnitts, der zur Gleichung hat

$$rx^2 + ty^2 = c,$$

wo c eine beliebige Constante bezeichnet. Diese Curve ist keine andere als die Indicatrix in dem Punkte, den man betrachtet, und deren Gleichung wir in Nr. 242 gaben. Denn man bezeichnet mit dieser allgemeinen Benennung nicht allein den unendlich kleinen Schnitt, welcher in der Oberfläche durch eine zur Tangentialebene in unendlich kleiner Entfernung parallele Ebene gemacht wird, sondern auch jeden Kegelschnitt, der ähnlich ist mit demjenigen, welcher durch die Durchschneidung dieser Ebene mit der Oberfläche gegeben wird.

Der Winkel der conjugirten Tangenten ist ein rechter, wenn sie gerichtet sind nach den beiden rechtwinkligen conjugirten Durchmessern der Indicatrix, und folglich nach den Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung.

Wir beschränken uns auf diese fundamentale Eigenschaft der conjugirten Tangenten, wobei wir den Nutzen der Indicatrix in der allgemeinen Untersuchung der Flächen von einer neuen Seite kennen gelernt haben, und wir verweisen in Beziehung auf Weiteres auf die Memoiren von Dupin.

Krümmungslinien.

248. Wenn man durch alle Punkte einer auf einer Fläche verzeichneten Linie Normalen zu dieser Fläche führt, so liegen sie im Allgemeinen in verschiedenen Ebenen, und die kürzeste Entfernung von zweien unter ihnen, welche unendlich nahen Punkten auf der Fläche entsprechen, ist ein unendlich Kleines derselben Ordnung wie die Entfernung dieser zwei Punkte und der Winkel dieser nämlichen Normalen.

Aber man kann sich vornehmen die Linien zu bestimmen, welche man auf der Oberfläche zeichnen müsste, damit die kürzeste Entfernung der successiven Normalen nicht Null, aber unendlich klein wäre gegen die Entfernung der correspondirenden Punkte der Fläche und den Winkel der beiden Normalen. Die Normalen werden sich dann in demselben Falle befinden wie die Tangenten an einer Curve doppelter Krümmung; und ihre Gesammtheit wird eine abwickelbare Fläche bilden. Es seien x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punktes einer Fläche, die Gleichungen der Normale in diesem Punkte sind

$$x - x' + p\,(z - z') = 0, \quad y - y' + q\,(z - z') = 0.$$

Der Durchschnittspunkt dieser Linie und der Normale in dem unendlich nahen Punkt, dessen Coordinaten $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$ sind, wird gegeben durch die Combination dieser zwei Gleichungen und ihrer Differentiale in Bezug auf x', y', z', welche sind

$$- dx' - pdz' + (rdx' + sdy')\,(z - z') = 0,$$
$$- dy' - qdz' + (tdy' + sdx')\,(z - z') = 0,$$

oder, indem man dz' ersetzt durch $pdx' + qdy'$,

$$(8) \quad \begin{cases} (1 + p^2)\,dx' + pqdy' = (rdx' + sdy')\,(z - z'), \\ (1 + q^2)\,dy' + pqdx' = (tdy' + sdx')\,(z - z'). \end{cases}$$

Die Bedingung dafür, dass die beiden Normalen sich treffen, erhält man, indem man ausdrückt, dass $z - z'$ aus

diesen beiden Gleichungen denselben Werth erhält; man findet so

(9) $$\frac{(1+p^2)\,dx' + pq\,dy'}{r\,dx' + s\,dy'} = \frac{(1+q^2)\,dy' + pq\,dx'}{t\,dy' + s\,dx'},$$

welche Gleichung dieselbe ist wie die Gleichung (3) und folglich für $\frac{dy'}{dx'}$ die beiden Werthe giebt, welche sich beziehen auf die Tangenten der Normalschnitte der grössten und kleinsten Krümmung. Nur muss man wohl bemerken, dass die Gleichung (9) nicht ausdrückt, dass die beiden Normalen sich wirklich schneiden, weil man die Glieder der zweiten Ordnung vernachlässigt hat; dass man aber für x, y, z Werthe finden wird, welche den Gleichungen der ersten Normale genügen und so sind, dass sie um Grössen von höherer Ordnung als der ersten vermehrt, der zweiten genügen würden. Sie drückt also aus, dass die kürzeste Entfernung der beiden Normalen ein unendlich Kleines von höherer als der ersten Ordnung ist.

Wenn man $\frac{dy'}{dx'}$ zwischen den Gleichungen (8) eliminirt, so kommt

(10) $$\frac{1+p^2-r(z-z')}{pq-s(z-z')} = \frac{pq-s(z-z')}{1+q^2-t(z-z')}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen der Normale

$$x - x' + p(z-z') = 0, \quad y - y' + q(z-z') = 0$$

bestimmt die Coordinaten x, y, z des Durchschnittspunktes der beiden unendlich nahen Normalen; und man erhält die Fläche, welche der Ort aller dieser Durchschnittspunkte ist, indem man x', y', z' zwischen diesen drei Gleichungen und jener der gegebenen Oberfläche eliminirt.

249. Die Gleichungen (8) unterscheiden sich von den Gleichungen (3 bis) nur durch die Vertauschung von $\frac{1}{D}$ mit $z - z'$. Der Werth von $(z-z')\sqrt{1+p^2+q^2}$, oder der Theil der Normale zwischen dem Punkt der Oberfläche und dem Durchschnittspunkt mit der unendlich nahen Normale, ist also gleich mit $\frac{1}{D}\sqrt{1+p^2+q^2}$ oder mit R. So-

mit sind die Entfernungen des Punktes der Oberfläche von den Punkten, wo die unendlich nahen Normalen sich treffen, gleich den Radien der Hauptkrümmungen. Diese beden Durchschnittspunkte sind also nichts Anderes als die Mittelpunkte der Hauptkrümmungen.

250. Dies vorausgesetzt, bestimmen wir die Curve, weche in jedem ihrer Punkte die Eigenschaft besitzt Tangente an dem Hauptschnitte zu sein, und folglich so ist, dass die Normalen zur Oberfläche, welche durch zwei unendlich nahe, auf dieser Curve genommene Punkte gehen, sich treffen. Die Coordinaten x', y', z' von irgend einem dieser Punkte genügen der Gleichung (9) und jener der Oberfläche; diese letzte giebt z' als Function von x', y', und wenn man diesen Werth in der Gleichung (9) substituirt, so hat man eine Gleichung der ersten Ordnung zwischen x', y', die vom zweiten Grade ist in Bezug auf $\frac{dy'}{dx'}$; man integrirt dieselbe und erhält zwei endliche Gleichungen, von denen jede eine willkürliche Constante enthält, welche man bestimmt, indem man ausdrückt, dass jeder dieser zwei Gleichungen zwischen x' und y' genügt wird durch die Coordinaten des Punktes der Oberfläche, durch welchen die Curven gehen sollen.

Auf diese Weise bestimmt man die Gleichungen dieser merkwürdigen Linien, welchen man den Namen Krümmungslinien gegeben hat.

251. Suchen wir jetzt die Gleichung der abwickelbaren Fläche, welche der Ort der Normalen zu der gegebenen Fläche ist, die durch alle Punkte einer ihrer Krümmungslinien geführt sind.

Die Gleichungen irgend einer dieser Normalen sind

$$x - x' + p(z - z') = 0, \quad y - y' + q(z - z') = 0,$$

und die Coordinaten x', y', z' müssen der Gleichung der gegebenen Fläche genügen und dem Integrale der Gleichung (9). Wenn man also x', y', z' zwischen diesen vier Gleichungen eliminirt, so wird die Endgleichung zwischen x, y, z diejenige der gesuchten Fläche sein.

Die beiden Oberflächen, welche so für die zwei durch denselben Punkt gehenden Krümmungslinien erhalten werden, schneiden sich unter einem rechten Winkel; und allgemein

schneiden alle diejenigen, welche sich auf eines der Systeme der Krümmungslinien beziehen, unter einem rechten Winkel alle diejenigen, welche sich auf das andere System beziehen.

252. Wenn man endlich den Ort der Durchschnittspunkte der consecutiven Normalen oder die Rückkehrkante der Fläche, welche der Ort dieser Normalen ist, kennen will, so muss man aus der Gleichung (10) x', y', z' eliminiren vermöge der zwei Gleichungen der Normale und jener der gegebenen Fläche; man erhält so eine zweite Gleichung zwischen x, y, z, welche in Verbindung mit jener der abwickelbaren Fläche die Rückkehrkante bestimmt, welche der Krümmungslinie entspricht, die man betrachtet.

Dieser zweiten Gleichung, da sie unabhängig ist von der Krümmungslinie, wird genügt durch die Rückkehrkanten, welche sich auf alle Krümmungslinien der gegebenen Oberfläche beziehen; sie repräsentirt also den Ort dieser Kanten, oder den Ort aller Durchschnittspunkte der consecutiven Normalen der gegebenen Oberfläche.

253. Die Durchschnittspunkte der consecutiven Normalen sind, wie wir sagten, die Mittelpunkte der osculirenden Kreise der Hauptschnitte: aber man muss sich wohl hüten zu glauben, dass sie die Mittelpunkte der osculirenden Kreise der Krümmungslinien seien; denn die Normalen, welche durch sie gehen, sind Tangenten an einer und derselben Curve, welche Eigenschaft niemals den Normalen zukommt, welche durch die Krümmungsmittelpunkte einer nicht ebenen Curve gehen. Aber im Allgemeinen sind die Krümmungslinien nicht eben; und sie könnten es sogar sein, ohne dass ihre osculirenden Kreise mit denen der Hauptschnitte zusammenfielen: man sieht davon ein sehr einfaches Beispiel in den Parallelkreisen einer Rotationsfläche. Es wird noch erfordert, dass ihre osculirenden Ebenen normal seien, und dass folglich die Krümmungslinien die kürzesten Linien auf der Oberfläche seien.

Anwendung auf das elliptische Paraboloid.

254. Es seien $2a$, $2b$ die Parameter der Hauptparabeln eines Paraboloids, dessen Axe in der Richtung der positiven z liegt; die Gleichung dieser Fläche ist

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

und man hat

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{b}, \quad r = \frac{1}{a}, \quad t = \frac{1}{b}, \quad s = 0.$$

Die Gleichung (9), welche den beiden Krümmungslinien angehört, wird somit, indem man $\frac{a}{b} = A$, $a(a-b) = B$ setzt,

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 + B)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Diese Gleichung differentiirend, erhält man

$$\left(2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 + B\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Zieht man aus der vorhergehenden den Werth von $x^2 - Ay^2 + B$, und setzt ihn in die letzte, so findet man

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Durch $xy\frac{dy}{dx}$ dividirend, wird diese

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0.$$

Da die drei Glieder vollständige Ableitungen sind, so hat man integrirend

$$l.\frac{1}{C}\frac{dy}{dx} + l.y - l.x = 0, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = C\frac{x}{y},$$

woraus man, neuerdings integrirend, findet

$$y^2 = Cx^2 + C'.$$

Diese Gleichung mit zwei willkürlichen Constanten ist das Integral der Gleichung zweiter Ordnung, und muss als besonderen Fall das der vorgelegten enthalten. Indem man diesen Werth von y in der Gleichung erster Ordnung substituirt, findet man zwischen C und C' eine Bedingung, welche diese beiden Constanten auf eine reducirt. Diese Bedingung ist $C' = \frac{BC}{1 + AC}$, so dass die allgemeine Gleichung der Krümmungslinie des Paraboloids ist

$$y^2 = Cx^2 + \frac{BC}{1 + AC},$$

oder, indem man A und B ihre Werthe substituirt,

$$y^2 = Cx^2 + \frac{ba(a-b)C}{b + aC}.$$

Diese Curven projiciren sich also auf die Ebene der x und y in Hyperbeln oder Ellipsen, je nachdem C positiv oder negativ ist.

Der Werth dieser Constante ist bestimmt, wenn man die Coordinaten des Punktes x', y' der Oberfläche giebt, durch welchen die Krümmungslinie gehen soll: man hat dann die Gleichung

$$y'^2 = Cx'^2 + \frac{ba(a-b)C}{b + aC},$$

oder

$$ax'^2 C^2 + [bx'^2 - ay'^2 + ab(a-b)]\, C - by'^2 = 0;$$

woraus man für C ungleiche reelle Werthe zieht, einen positiven und einen negativen, welche wir durch α und $-\beta$ bezeichnen werden. Die beiden Krümmungslinien, welche sich in dem gegebenen Punkte kreuzen, haben also zu Gleichungen

$$y^2 = \alpha x^2 + \frac{ab(a-b)\alpha}{b + a\alpha}$$

und

$$y^2 = -\beta x^2 + \frac{ab(a-b)\beta}{a\beta - b}.$$

Wenn man $a > b$ voraussetzt, so ist die in der Ebene der x und z liegende Parabel diejenige, welche den grössten Parameter hat. Die Hyperbeln, nach welchen sich die Krümmungslinien projiciren, haben dann ihre reelle Axe in der Richtung der Axe der y, und ihre Länge ist $\sqrt{\frac{ab(a-b)\alpha}{b + a\alpha}}$; sie wird am grössten für $\alpha = \infty$, wo ihr Werth $\sqrt{b(a-b)}$ ist; die Hyperbeln reduciren sich dann auf die Axe der y. Man sieht daher, dass indem man auf der Axe der y zu beiden Seiten des Anfangs Längen gleich $\sqrt{b(a-b)}$ abträgt, man die Grenzen hat, zwischen welche die Scheitel der Hyperbeln fallen, welche die Projectionen von einem der Systeme der Krümmungslinien sind.

Die Gleichung, welche die Projectionen der Linien des anderen Systems repräsentirt, giebt immer reelle Ellipsen, weil man $\alpha\beta - b > 0$, oder $\beta > \frac{b}{a}$ hat. In der That, wenn man $-\frac{b}{a}$ dem C substituirt in der Gleichung, welche diese Constante bestimmt, so findet man ein negatives Resultat; und da sie nur eine negative Wurzel hat, so ist diese Wurzel numerisch grösser als $\frac{b}{a}$; somit hat man $\beta > \frac{b}{a}$, was auch x', y' seien, und die Gleichung giebt nur reelle Ellipsen.

Die Halbaxe der x ist gleich mit $\sqrt{\frac{ab(a-b)}{a\beta - b}}$, und die Halbaxe der y mit $\sqrt{\frac{ab(a-b)\beta}{a\beta - b}}$. Der kleinste Werth dieser letzten entspricht $\beta = \infty$, und ist $\sqrt{b(a-b)}$; er giebt dieselben Punkte, welche wir schon für die obere Grenze der reellen Axen der Hyperbeln fanden. In diesem Falle fällt die Ellipse mit einem Theile der Axe der y zusammen.

Wenn man $x' = 0$ hat, so wird ein Werth von C unendlich; der andere ist positiv, wenn man hat $y' < \sqrt{b(a-b)}$, und negativ im entgegengesetzten Fall. Im ersten Falle sind die beiden Krümmungslinien eine Hyperbel und die Axe der y; im zweiten Falle bestehen sie aus einer Ellipse und der Axe der y.

Wenn $y' = 0$, so ist ein Werth von C Null, und der andere negativ. Die Krümmungslinien sind dann eine Ellipse und die Axe der x.

255. Die Gleichungen, welche die Nabelpunkte bestimmen, werden in dem Falle, womit wir uns beschäftigen,

$$xy = 0, \quad a(y^2 + b^2) = b(x^2 + a^2);$$

was die beiden Systeme giebt

$$x = 0,\ y = \pm\sqrt{b(a-b)}, \text{ und } y = 0,\ x = \pm\sqrt{a(b-a)}.$$

Man sieht, dass nur eines reelle Coordinaten giebt; und im gegenwärtigen Falle ist es das erste, weil wir $a > b$ vorausgesetzt haben. Es giebt also zwei Nabelpunkte in dem

elliptischen Paraboloid; sie liegen auf der Hauptparabel, welche den kleinsten Parameter hat, und sind keine anderen als die beiden Punkte, welche wir schon als Grenzen der Scheitel der Krümmungslinien erkannten.

256. Ist das Paraboloid eine Rotationsfläche, so fallen die Nabelpunkte mit dem Scheitel zusammen. Die beiden Werthe von C werden $\frac{y'^2}{x'^2}$ und -1; und die Gleichungen der Krümmungslinien sind

$$y^2 = \frac{y'^2}{x'^2} x^2, \quad \text{und} \quad y^2 + x^2 = c;$$

die erste repräsentirt alle durch die Rotationsaxe gehenden Ebenen, und die zweite Cylinder, welche zur Basis auf der Ebene xy Kreise von willkürlichem Radius haben, deren Mittelpunkt im Scheitel liegt. Die Krümmungslinien sind also die Meridiane und die Parallelkreise, wie dies in allen Rotationsflächen stattfindet. Was den Ort der Krümmungsmittelpunkte betrifft, so besteht er offenbar aus der Rotationsaxe und aus der Oberfläche, welche durch die Rotation der Evolute der Meridiancurve um dieselbe Axe erzeugt wird.

Neue Theorie der Krümmung der Flächen.

257. Um eine genaue Vorstellung von der Gestalt einer Fläche in der Nähe irgend eines ihrer Punkte zu haben, genügt es nicht die Gestalt der Schnitte zu kennen, welche durch Ebenen gemacht werden, die durch die Normale in diesem Punkt gehen, obgleich diese Curven alle Punkte der Fläche bestimmen. Es ist noch nothwendig das Gesetz zu kennen, nach welchem die Richtung der Fläche selbst oder ihrer Tangentialebene variirt, wenn man in irgend einer dieser Curven weiter geht, oder wenn man von einer zur anderen übergeht. Die Krümmung der Normalschnitte, aus welcher übrigens die der schiefen Schnitte sich ergiebt, genügt also nicht, um in der Nähe eines Punktes eine gründliche Kenntniss von der Gestalt der Fläche zu geben. Sie lässt nur das Gesetz der Biegung der auf dieser Fläche verzeichneten Curven erkennen, und nicht das Biegungsgesetz der Fläche selbst.

Die sinnreiche Theorie der conjugirten Tangenten genügt auch nicht zur Erreichung dieses Zwecks; denn, obgleich die gegenseitige Abhängigkeit der Richtungen dieser zwei Tangenten mit der Gestalt der Fläche innig verbunden ist, so vermag sie doch nicht eine genaue Vorstellung derselben zu geben, weil sie eine sehr entfernte Folge davon ist.

Man sieht also, was noch in der Untersuchung fehlt, welche wir bisher über die Gestalt der Flächen gemacht haben. Wir werden sie durch eine neue Betrachtung vervollständigen, die man Bertrand verdankt. Aus seinem Memoire haben wir die verschiedenen Sätze gezogen, welche wir auseinandersetzen wollen, und welche wirklich eine neue Theorie der Krümmung der Flächen constituiren.

258. Es sei A irgend ein Punkt einer Fläche, und AZ die Normale. Legen wir durch AZ Ebenen in allen Richtungen, und nehmen wir auf jeder Durchschnittscurve dieser Ebenen und der Oberfläche, von A an, eine unendlich kleine Länge $AM = \varepsilon$; diese Länge, getheilt durch den Winkel der extremen Tangenten, giebt den Krümmungsradius dieser Curve im Punkte A.

Fig. 9.

Es sei jetzt MN die Normale zur Oberfläche in M. Ihre Richtung wird bestimmt durch die Winkel, welche sie mit drei rechtwinkligen Axen macht, z. B. mit der Normale AZ und zwei unter einem rechten Winkel in der in A tangirenden Ebene geführten Geraden AX, AY. Um einfachere Ausdrücke für die Cosinus der gesuchten Winkel zu erhalten, wählen wir für die Axen AX, AY die beiden Richtungen, für welche $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ im Anfang Null ist. Dieses System ist im Allgemeinen nur eines; man erhält es, indem man das

Rechteck xy verschwinden macht aus der Entwicklung des Werthes von z nach den steigenden Potenzen von x und y. Die Discussion ist dieselbe wie jene, welche man in der Theorie der Curven zweiten Grades macht; und wenn nach dem Verschwinden des xy enthaltenden Gliedes die Coëfficienten von x^2 und y^2 gleich wären, so würde jedem System rechtwinkliger Axen die Eigenschaft zukommen das nämliche Glied verschwinden zu machen. Dies vorausgesetzt, machen wir allgemein

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q, \quad \frac{d^2z}{dx^2}=r, \quad \frac{d^2z}{dxdy}=s, \quad \frac{d^2z}{dy^2}=t;$$

man hat im Anfang

$$p=0, \quad q=0, \quad s=0.$$

Wenn man jetzt durch X, Y, Z die Winkel bezeichnet, welche die Normale in irgend einem Punkt der Oberfläche mit den Axen macht, so hat man bekanntlich

$$\cos X=\lambda p, \quad \cos Y=\lambda q, \quad \cos Z=-\lambda,$$

wo der Werth von λ ist

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

und das doppelte Zeichen sich auf die beiden Richtungen der Normale bezieht.

Wenden wir diese Formeln an auf den Punkt M, und bezeichnen wir durch α den Winkel, welchen die Spur AU der Schnittebene auf der tangirenden Ebene mit ZAX macht; die drei Coordinaten x, y, z des Punktes M sind respective, mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung $\varepsilon\cos\alpha$, $\varepsilon\sin\alpha$, 0. Um die Werthe von λp, λq, $-\lambda$ im Punkte M zu finden, braucht man nur zu ihren Werthen in A die Incremente zu addiren, welche diese durch die unendlich kleinen Aenderungen der Coordinaten erleiden, wenn man vom Anfang A auf den Punkt M übergeht. Aber im Punkte A hat man

$$p=0, \quad q=0, \quad s=\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=0, \quad \text{und} \quad \lambda=1,$$

indem man das obere Zeichen der Wurzel wählt. Man hat also im Punkte M

(1) $\cos X=\varepsilon r\cos\alpha, \quad \cos Y=\varepsilon t\sin\alpha, \quad \cos Z=-1,$

wo die Werthe von r und t sich auf den Anfang beziehen Dies sind die sehr einfachen Formeln, welche die Richtung irgend einer, der ersten unendlich nahen Normale bestimmen Sie bilden die Basis der Theorie, welche wir auseinandersetzen wollen.

259. Wir sagten, was man kennen müsse, sei das Gesetz, nach welchem die Richtung der Normale zur Oberfläche in der Nähe des Punktes A variirt. Dahin wird man aber gelangen, indem man vermöge α und ε ausdrückt: 1. den Winkel, welchen die Projection der Normale MN auf die Schnittebene mit AZ macht; 2. den Winkel von MN mit seiner Projection, d. h. mit der Ebene AZM. Man kann bemerken, dass die erste dieser beiden Winkelcoordinaten die Krümmung des Normalschnitts AZM bestimmt. Betrachten wir zunächst den ersten dieser beiden Winkel: er ist das Complement desjenigen, welchen MP mit AU bildet; und, indem man immer die unendlich Kleinen der zweiten Ordnung vernachlässigt, ist dieser letzte derselbe wie der von MN mit AU, weil die Ebene des unendlich kleinen Winkels NMP senkrecht ist zur Ebene ZAU, und seine Schenkel endliche Winkel mit AU machen. Aber nach den Formeln (1) hat der Cosinus des Winkels von MN mit AU, welcher gleich ist mit

$$\cos X \cos\alpha + \cos Y \sin\alpha,$$

zum Werthe

$$\varepsilon\,(r\cos\alpha^2 + t\sin\alpha^2).$$

Dies ist der Sinus des Contingenzwinkel des Schnittes, oder dieser Winkel selbst. Indem man ihn durch den Bogen ε theilt, hat man die Krümmung, welche wir durch v bezeichnen werden; was die Formel giebt

$$v = r\cos\alpha^2 + t\sin\alpha^2. \tag{2}$$

260. Gehen wir jetzt über zu dem zweiten Winkel NMP. Er ist offenbar das Complement desjenigen, welchen MN mit der Senkrechte auf der Ebene ZAU macht. Nehmen wir die Richtung dieser Senkrechte in dem Sinne, wo sie mit AX den Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$ bildet, und suchen wir den positiven oder negativen Cosinus des Winkels, welchen sie mit MN macht: dieser wird der Sinus von NMP oder dieser Winkel selbst sein, der als positiv betrachtet wird, wenn die Normale MN

auf derselben Seite von ZAU liegt wie die unter dem Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$ geführte Gerade, und als negativ wenn sie auf der entgegengesetzten Seite liegt.

Der Ausdruck dieses Cosinus ist

$$\cos X \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos Y \cos\alpha,$$

oder

$$\varepsilon(t - r)\sin\alpha\cos\alpha,$$

oder auch

$$\frac{\varepsilon\sin 2\alpha}{2}(t - r).$$

Wenn wir also durch ω den positiven oder negativen Winkel NMP bezeichnen, so haben wir

(3) $$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon(t - r)\sin 2\alpha.$$

Die Formeln (2) und (3) geben den Ausdruck der beiden Grössen, welche wir bestimmen wollten; wir werden nur die hauptsächlichsten Folgerungen daraus entwickeln.

261. Folgerungen aus der Formel (3). — Wenn wir ε constant voraussetzen, so variirt der Winkel ω proportional mit dem Sinus des doppelten Winkels α; woraus sogleich hervorgeht, dass er Null ist für die vier besonderen Werthe

$$\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \pi, \quad \alpha = \frac{3\pi}{2},$$

d. h. wenn der Punkt M sich nach einer der beiden Richtungen AX, AY verrückt.

Man sieht ferner, dass der Winkel ω für keine andere Richtung Null werden kann, wenn nicht $t = r$, in welchem Falle er für jede Richtung Null ist.

Wir erhalten somit diese bemerkenswerthe Eigenschaft:

In jedem Punkt einer beliebigen Oberfläche giebt es immer zwei solche rechtwinklige Richtungen, dass die Normalen zur Oberfläche, welche durch die dem ersten unendlich nahen Punkte in irgend einer dieser beiden Richtungen geführt werden, in der nach dieser Richtung geführten Normalebene liegen; sie liegen also jede in einer Ebene,

welche die erste Normale enthält, und treffen folglich diese. Wenn es mehr als zwei Richtungen giebt, welche diese Eigenschaft besitzen, so besitzen alle anderen dieselbe.

Wir geben diesen beiden bemerkenswerthen Richtungen den Namen Hauptrichtungen. Man darf nicht vergessen, dass wir die unendlich Kleinen der zweiten Ordnung vernachlässigt haben. Man muss also bemerken, dass die Normalen, welche geführt werden durch unendlich nahe Punkte in diesen Richtungen, sich recht gut in der That nicht treffen können, dass aber ihre kürzeste Entfernung, wenn sie nicht Null ist, nur unendlich klein von höherer als der ersten Ordnung sein kann.

Man hat den auf einer Oberfläche verzeichneten Curven, welche in jedem ihrer Punkte eine Richtung haben, welche die eben erkannte Eigenschaft besitzt, den Namen Krümmungslinien gegeben. Offenbar kann man deren zwei durch irgend einen Punkt der Fläche führen.

262. Die Formel (3) führt zu einem allgemeinen Satze, den wir mittheilen wollen, und woraus wir den vorhergehenden hätten folgern können; aber dieser bot sich so natürlich dar, dass wir geglaubt haben, ihn unmittelbar hervorheben zu müssen. Wenn wir die beiden Richtungen betrachten, welche bestimmt werden durch die Winkel α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$, wo α irgend einen Werth hat, so sind die beiden Werthe von ω gleich und haben verschiedene Zeichen; also können wir, indem wir Rücksicht nehmen auf den Sinn, in welchem der Winkel ω aufzutragen ist, je nachdem er positiv oder negativ ist, den folgenden Satz aussprechen:

Wenn wir in irgend einem Punkt einer Fläche zwei rechtwinklige Richtungen betrachten, auf diesen zwei gleiche unendlich kleine Längen nehmen, und durch ihre Endpunkte Normalen zur Oberfläche führen, so machen diese Normalen respective gleiche Winkel mit den Ebenen, welche geführt sind durch die Normale in dem ersten Punkt und jede der beiden Richtungen; und ferner liegen sie beide in dem Flä

chenwinkel, den diese beiden Ebenen bilden, oder beide ausserhalb.

Diese von Bertrand entdeckte Eigenschaft enthält offenbar die vorige, wie er gezeigt hat. In der That, weil der Sinn in welchem man den Winkel ω tragen muss sich ändert, wenn man von einer Richtung zu der auf ihr senkrechten übergeht, so giebt es nothwendig eine Zwischenrichtung, für welche der Winkel ω Null ist. Also ist er auch Null für die auf dieser senkrechte Richtung, und man kommt so auf den vorigen Satz zurück.

263. Folgerungen aus der Formel (2). — Betrachten wir irgend zwei senkrechte Richtungen, welche den Winkeln α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$ entsprechen. Durch v, v' die Krümmungen dieser beiden Normalschnitte bezeichnend, haben wir

$$v = r \cos \alpha^2 + t \sin \alpha^2,$$
$$v' = r \sin \alpha^2 + t \cos \alpha^2;$$

daher

$$v + v' = r + t.$$

Man kommt also zu diesem merkwürdigen Satze:

In jeder Oberfläche ist die Summe der Krümmungen der beiden Normalschnitte, welche durch irgend zwei rechtwinklige Ebenen gemacht werden, constant.

Diese Summe ist also diejenige, welche sich bezieht auf die beiden durch die Hauptrichtungen in diesem Punkt gehenden Schnitte, weil diese Richtungen rechtwinklig sind. Die Werthe von v, welche sich darauf beziehen, werden erhalten, indem man dem α successive die Werthe 0 und $\frac{\pi}{2}$ giebt; sie sind also r und t.

Man kann bemerken, dass der Ausdruck von v, welcher durch die Formel (2) gegeben wird, derselbe bleibt, wenn man α in $2\pi - \alpha$ verwandelt. Woraus man schliesst, dass für zwei Normalebenen, welche symmetrisch sind in Bezug auf irgend eine von denjenigen, welche durch die Hauptrichtungen gehen, die Krümmung der Schnitte dieselbe ist.

Man kann noch eine andere Bemerkung machen, die nicht ohne Interesse ist. Wenn man den Winkelraum um irgend

einen Punkt einer Oberfläche in gleiche unendlich kleine Theile theilt, und Ebenen führt durch diese Theilungslinien und die Normale, so ist das Mittel aus den Krümmungen aller dieser Schnitte die halbe Summe der Hauptkrümmungen, d. h. der Krümmungen der Hauptschnitte. Denn man kann alle diese Schnitte in Paare von zwei Schnitten theilen, deren Ebenen zu einander senkrecht sind; und da in jedem Paar die Summe der Krümmungen gleich der Summe der Hauptkrümmungen ist, so wird das allgemeine Mittel die Hälfte dieser Summe sein. Endlich ist diese mittlere Krümmung keine andere als die des gleich entfernten Schnittes von den beiden Hauptschnitten. Denn, indem man $\alpha = \frac{\pi}{4}$ macht, findet man

$$v = \frac{r + t}{2}.$$

264. Wenn die Coëfficienten r und t von demselben Zeichen sind, in welchem Falle man sie positiv voraussetzen kann, weil dies dann nur von dem Sinne abhängt, in welchem man z positiv nimmt, so ist leicht zu sehen, dass ein Maximum und ein Minimum für die Krümmung der Normalschnitte existirt. In der That, man kann den Werth von v so schreiben:

$$v = r + (t - r) \sin \alpha^2,$$

und man erkennt unmittelbar, dass wenn $t - r > 0$, der kleinste Werth von v mit $\alpha = 0$ correspondirt, und sein grösster mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$; diese Werthe sind r und t. Das Umgekehrte findet statt, wenn $t - r < 0$; woraus man den Satz schliesst:

Von allen Normalschnitten, welche in demselben Punkt einer Oberfläche gemacht werden, bieten diejenigen, welche durch die Hauptrichtungen in diesem Punkt gehen, das Maximum und Minimum der Krümmung dar.

Wir geben diesen beiden besonderen Schnitten den Namen Hauptschnitte.

265. Nehmen wir jetzt an, dass r und t verschiedene Zeichen haben, und dass z. B. r positiv sei. Von $\alpha = 0$ an, welches $v = r$ giebt, geht v abnehmend bis zu 0, was mit $\tang \alpha^2 = -\frac{r}{t}$ correspondirt. Es wird darauf negativ, welches

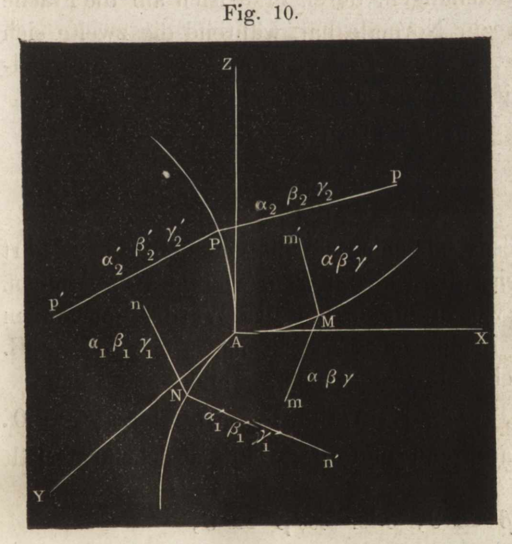
zeigt, wie wir dies bemerkt haben, dass der Krümmungsmittelpunkt auf die andere Seite der Tangentialebene übergeht. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nimmt v den Werth t an. Nachher geht es symmetrisch durch dieselben Werthe in den drei anderen rechten Winkeln hindurch. Man findet somit die schon durch andere Betrachtungen erhaltenen Resultate wieder. Ebenso würde es sein in dem Falle, wo einer der Coëfficienten r, t Null wäre.

Theorem von Dupin über die orthogonalen Flächen.

Dieses Theorem sagt: Wenn drei continuirliche Reihen von Flächen sich gegenseitig schneiden, und in solcher Weise, dass sie in jedem Durchschnittspunkte rechtwinklig zu einander sind, so bilden ihre Durchschnittslinien für jede Oberfläche die Krümmungslinien.

Bertrand hat aus seinem fundamentalen Satze einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes abgeleitet. In der That, betrachten wir drei Reihen orthogonaler Flächen, und es seien in einem Punkte A AX, AY, AZ die Tangenten an den Durchschnittscurven der Flächen, welche respective in diesem Punkt den drei Reihen angehören, die wir betrachten. Nehmen wir auf diesen Curven die Punkte M, N, P in gleichen unendlich kleinen Entfernungen von

Fig. 10.



dem Punkt A. In jedem dieser Punkte sind die Normalen der beiden durch ihn gehenden Flächen zu einander senkrecht. Es seien α, β, γ und α', β', γ' die Winkel, welche respective mit den Axen AX, AY, AZ die beiden Normalen Mm, Mm' machen, so hat man

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

Aber α und α' unterscheiden sich unendlich wenig von einem rechten Winkel, und β, γ' sind unendlich klein: also wird diese Gleichung mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung

$$(a) \qquad \cos\beta' + \cos\gamma = 0.$$

Es seien ebenso α_1, β_1, γ_1 und α'_1, β'_1, γ'_1 die respective mit den Normalen Nn, Nn' correspondirenden Winkel, und endlich α_2, β_2, γ_2, α'_2, β'_2, γ'_2 diejenigen, welche den Normalen Pp, Pp' entsprechen: man hat in gleicher Weise

$$(b) \qquad \cos\gamma'_1 + \cos\alpha_1 = 0,$$

$$(c) \qquad \cos\alpha'_2 + \cos\beta_2 = 0.$$

Diese drei Gleichungen a, b, c resultiren daraus, dass die drei Flächen in allen Punkten ihrer respectiven Durchschnitte rechtwinklig sind. Nach dem Satze von Bertrand in Nr. 262 über die Normalen einer und derselben Fläche hat man aber die drei folgenden Gleichungen, deren erste sich auf die Fläche bezieht, welche AX zur Normale hat, während die zweite sich auf diejenige bezieht, welche AY zur Normale hat, und endlich die dritte auf diejenige, deren Normale AZ ist:

$$(d) \qquad \cos\beta_2 = \cos\gamma'_1,$$

$$(e) \qquad \cos\gamma = \cos\alpha'_2,$$

$$(f) \qquad \cos\alpha_1 = \cos\beta'.$$

Die Combination dieser Gleichungen mit den drei ersten führt leicht zu dem Beweise des Satzes, den wir im Auge haben. In der That, wenn wir in die ersten die Werthe von dreien der Cosinus, welche in den letzten vorkommen, einsetzen, z. B. von denjenigen, welche die ersten Glieder bilden, so kommt

$$\cos\beta' + \cos\alpha'_2 = 0, \quad \cos\gamma'_1 + \cos\beta' = 0, \quad \cos\alpha'_2 + \cos\gamma'_1 = 0.$$

Die beiden ersten addirend und die dritte abziehend, erhält man

$$2\cos\beta' = 0, \quad \text{oder} \quad \cos\beta' = 0,$$

welche Gleichung unmittelbar fünf andere nach sich zieht; so dass man hat

$$\cos\beta' = 0, \quad \cos\gamma = 0, \quad \cos\alpha'_2 = 0,$$
$$\cos\beta_2 = 0, \quad \cos\gamma'_1 = 0, \quad \cos\alpha_1 = 0.$$

Die erste drückt aus, dass die Normale Mm' in der Ebene ZX liegt und folglich die Normale AZ trifft; woraus folgt, dass AM in der Richtung einer Krümmungslinie der Oberfläche, auf welcher AZ normal ist, liegt. Ebenso verhält es sich mit den anderen; so dass diese sechs Gleichungen zeigen, dass die drei Durchschnitte AM, AN, AP der vorgelegten Oberflächen auf jeder von ihnen in den Richtungen ihrer Krümmungslinien liegen.

Da diese Eigenschaft in allen Punkten einer jeden der fraglichen Curven stattfindet, so ist sie nichts Anderes als eine Krümmungslinie ihrer Oberfläche. Man kann also das folgende Theorem aussprechen, welches das von Dupin ist:

Wenn drei Reihen von Oberflächen sich orthogonal durchschneiden, so sind ihre Durchschnitte nichts Anderes als ihre respectiven Krümmungslinien.

Und da es in den vorhergehenden Rechnungen nur auf die Betrachtung der drei Oberflächen ankam, welche durch den Punkt A gehen, so kann man das folgende Theorem aussprechen, dessen Folge das von Dupin ist:

Wenn drei Oberflächen sich so schneiden, dass sie normal sind in allen Punkten, worin sie sich treffen, so sind die Durchschnittscurven auf jeder der drei Flächen Tangenten an den durch den gemeinschaftlichen Punkt dieser drei Flächen gehenden Krümmungslinien.

Allgemeine Bemerkungen über die Systeme von Geraden, welche durch alle Punkte des Raums geführt sind.

266. Die Eigenschaften, welche wir aus der Formel (3) in Beziehung auf die Normalen einer Fläche abgeleitet haben, sind charakteristisch; d. h. sie würden nicht stattfinden

in Beziehung auf ein System von Geraden, deren Lage für jeden Punkt des Raums bestimmt sein würde durch stetige Functionen der Coordinaten, welche aber nicht Normalen zu einer Reihe von Flächen wären. Nicht ebenso verhält es sich mit den aus der Formel (2) abgeleiteten Eigenschaften; sie charakterisiren nicht speciell die Normalen einer und derselben Fläche. Wir wollen diese bemerkenswerthen Sätze beweisen, welche sich ebenfalls in dem Memoire von Bertrand finden.

Es seien X, Y, Z stetige Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes; sie bestimmen für diesen Punkt eine einzige Gerade, welche mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus c, c', c'' diesen Functionen proportional sind. Wenn man setzt

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = D,$$

und immer die Richtung betrachtet, welche dem Zeichen $+$ dieser Wurzel entspricht, so haben diese Cosinus zu Werthen

$$(1) \qquad c = \frac{X}{D}, \quad c' = \frac{Y}{D}, \quad c'' = \frac{Z}{D}.$$

Es sei jetzt M irgend ein Punkt des Raumes mit den Coordinaten x, y, z; MN die durch die Gleichungen (1) bestimmte Richtung; MU, MV seien zwei Richtungen, welche rechte Winkel mit einander und mit MN bilden; a, a', a'' und b, b', b'' die Cosinus der Winkel, welche sie respective mit den Axen machen. Nehmen wir auf diesen Richtungen zwei unendlich kleine Längen $MD = MD' = \varepsilon$, und führen wir in den Punkten D, D' die Geraden DP, $D'P'$, welche auch

Fig. 11.

durch die Gleichungen (1) vermöge der Coordinaten dieser respectiven Punkte bestimmt werden.

Dies vorausgesetzt, wollen wir zunächst den zuerst ausgesprochenen Satz beweisen, welcher darin besteht, dass die Linien DP, $D'P'$ nur dann gleiche Winkel mit den Ebenen NMD, NMD' in dem angegebenen Sinne machen werden, wenn es möglich ist durch einen beliebigen Punkt des Raums eine Fläche zu legen, welche in jedem ihrer Punkte normal ist zu der durch die Formeln (1) bestimmten Gerade. Bestimmen wir zuerst den Winkel ω, den DP mit der Ebene NMU macht, oder sein Complement, welches der Winkel von DP mit MV ist. Bemerken wir hierzu, dass die Coordinaten des Punktes D sind

$$x + a\varepsilon,\quad y + a'\varepsilon,\quad z + a''\varepsilon,$$

und dass die Functionen c, c', c'' von x, y, z respective für diesen Punkt werden

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &c + \varepsilon\left(a\frac{dc}{dx} + a'\frac{dc}{dy} + a''\frac{dc}{dz}\right),\\ &c' + \varepsilon\left(a\frac{dc'}{dx} + a'\frac{dc'}{dy} + a''\frac{dc'}{dz}\right),\\ &c'' + \varepsilon\left(a\frac{dc''}{dx} + a'\frac{dc''}{dy} + a''\frac{dc''}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

Nach diesen Werthen der Cosinus der Winkel von DP mit den Axen hat der Cosinus des Winkels von DP mit MV, oder der Sinus des Winkels ω, oder endlich dieser Winkel selbst, weil er unendlich klein ist, folgenden Ausdruck, indem man bemerkt, dass $bc + b'c' + b''c'' = 0$,

$$\omega = \varepsilon b\left(a\frac{dc}{dx} + a'\frac{dc}{dy} + a''\frac{dc}{dz}\right) + \varepsilon b'\left(a\frac{dc'}{dx} + a'\frac{dc'}{dy} + a''\frac{dc'}{dz}\right)$$
$$+ \varepsilon b''\left(a\frac{dc''}{dx} + a'\frac{dc''}{dy} + a''\frac{dc''}{dz}\right).$$

Es ist fast überflüssig zu bemerken, dass wenn man den Punkt D auf irgend einer MD tangirenden Curve nähme, der Werth von ω keine Aenderung erleiden würde, weil wir die unendlich Kleinen der zweiten Ordnung vernachlässigen.

Wenn man jetzt den Winkel von $D'P'$ mit der Ebene NMV haben will, der in demselben Sinne in Bezug auf

diese Ebene genommen ist, so muss man in dem vorstehenden Ausdruck a, a', a'' in b, b', b'' und b, b', b'' in $-a$, $-a'$, $-a''$ verwandeln. Nimmt man daher diesen Winkel in entgegengesetztem Sinn, was durch Aenderung der Zeichen geschieht, so hat man, indem man ihn durch ω' bezeichnet,

$$\omega' = \varepsilon a\left(b\frac{dc}{dx}+b'\frac{dc}{dy}+b''\frac{dc}{dz}\right)+\varepsilon a'\left(b\frac{dc'}{dx}+b'\frac{dc'}{dy}+b''\frac{dc'}{dz}\right)$$
$$+\varepsilon a''\left(b\frac{dc''}{dx}+b'\frac{dc''}{dy}+b''\frac{dc''}{dz}\right).$$

Was wir suchen, ist die Bedingung dafür dass $\omega = \omega'$, was auch die Richtung MU sei. Indem man aber die Differenz $\omega' - \omega$ bildet, und sich der bekannten Formeln erinnert

$$ab' - ba' = c'', \quad a''b - b''a = c', \quad a'b'' - b'a'' = c,$$

welche daraus resultiren, dass die drei Richtungen in M rechtwinklig sind wie die Axen, findet man unmittelbar

$$(3) \quad \omega' - \omega = \varepsilon\left[c''\left(\frac{dc}{dy}-\frac{dc'}{dx}\right)+c'\left(\frac{dc''}{dx}-\frac{dc}{dz}\right)+c\left(\frac{dc'}{dz}-\frac{dc''}{dy}\right)\right].$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit der Winkel ω, ω' ist also, dass das zweite Glied dieser Gleichung Null sei; und man bemerkt, dass, da es nur von Grössen abhängt, welche für denselben Punkt M constant sind, es, wenn es für eine gewisse für MU gewählte Richtung Null ist, für jede andere Null sein wird. Man kann aber in dieser Bedingungsgleichung den Grössen c, c', c'' die respectiven Grössen X, Y, Z, welche ihnen proportional sind, substituiren. Denn die Form dieser Gleichung lässt unmittelbar erkennen, dass die Einführung eines gemeinschaftlichen Factors der Grössen c, c', c'', der eine Function von x, y, z ist, nichts hervorbringt als Glieder, die sich zerstören, und einen gemeinschaftlichen Factor, den man unterdrücken kann.

Somit ist die nothwendige und hinreichende analytische Bedingung für die Gleichheit der Winkel ω, ω'

$$X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Nun ist diese Bedingung genau die der Integrabilität des Ausdrucks

$$X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

und wenn sie erfüllt ist, so repräsentirt diese letztere Gleichung eine Reihe von Flächen, deren Normale in jedem Punkt mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus proportional sind mit X, Y, Z.

Somit zieht die Gleichheit der Winkel ω, ω' in einem beliebigen Punkt M des Raums die Consequenz nach sich, dass man durch einen beliebigen Punkt eine solche Fläche legen kann, dass ihre Normalen mit den Geraden des in Rede stehenden Systems zusammenfallen.

Diese Eigenschaft, welche wir für irgend eine Oberfläche erkannt hatten, ist also charakteristisch; sie gehört nur den Normalen einer Fläche an: sie besteht für kein anderes System von Geraden.

267. Da das zweite Glied der Gleichung (3) durchaus nicht von der besonderen Richtung von MU abhängt, so folgt dass die Differenz der Winkel ω, ω', welche Null ist in dem Falle der Normalen einer und derselben Fläche, constant ist für einen und denselben Punkt, wenn man ein beliebiges System von Geraden betrachtet, die in jedem Punkt durch stetige Functionen von x, y, z bestimmt werden. Diese Bemerkung hat Sturm gemacht.

268. Gehen wir jetzt über zu den Eigenschaften, welche resultiren aus der Vergleichung der Krümmungen der Normalschnitte, welche in einer Fläche durch Ebenen gemacht werden, die mit einander einen rechten Winkel bilden; und untersuchen wir, ob sie charakteristisch sind wie die vorigen, oder ob sie noch bestehen, wenn man statt der Normalen irgend ein stetiges System von geraden Linien betrachtet. In einer Fläche ist die Normale eines Schnittes nichts Anderes als die Projection der Normale der Fläche auf die Ebene dieses Schnittes, und die Krümmung des Schnittes ist das Verhältniss des Winkels zweier unendlich nahen Normalen zu dem zwischenliegenden Bogen. Wir wollen diese Betrachtung verallgemeinern für das System von Geraden, welche in jedem Punkt des Raumes durch die Functionen X, Y, Z bestimmt werden. Hierzu legen wir durch irgend eine MN dieser Geraden eine beliebige Ebene NMU, und projiciren auf diese

Ebene alle Geraden des Systems, welche sich auf ihre verschiedenen Punkte beziehen. Da ihre Richtungen bestimmt sind durch die Coordinaten eines jeden Punktes, die z. B. auf Axen in dieser Ebene bezogen sind, so wissen wir dass eine Reihe zu diesen Geraden normaler Curven existirt, weil eine Differentialgleichung zwischen zwei Variablen immer ein Integral hat; und wir wollen diejenige von diesen Curven betrachten, welche durch den Punkt M geht. Wenn das allgemeine System der Geraden dasjenige der Normalen zu einer Reihe von Flächen wird, so ist diese Curve keine andere als der Schnitt der durch M gehenden Fläche mit der Ebene NMU. Dies vorausgesetzt, wird die Krümmung v der Curve, welche wir eben bestimmt haben, erhalten wie in dem Falle wo die Geraden zu einer und derselben Fläche normal sind. Man nimmt auf MU eine unendlich kleine Länge $MD = \varepsilon$, man führt durch den Punkt D die Gerade DP des in Rede stehenden Systems, und sucht den Cosinus des Winkels, welchen sie mit MU macht; er ist derselbe wie derjenige, welchen die Projection von DP auf NMU mit MU macht, und ist folglich der Sinus des Winkels dieser Projection mit NM oder dieser Winkel selbst. Indem man Gebrauch macht von den schon berechneten Formeln für die Richtung DP, und ausserdem bemerkt dass

$$ac + a'c' + a''c'' = 0,$$

hat man für den Cosinus des Winkels der beiden Richtungen MU, DP, oder für den Contingenzwinkel der Curve, um die es sich handelt:

$$\varepsilon a\left(a\frac{dc}{dx} + a'\frac{dc}{dy} + a''\frac{dc}{dz}\right) + \varepsilon a'\left(a\frac{dc'}{dx} + a'\frac{dc'}{dy} + a''\frac{dc'}{dz}\right)$$
$$+ \varepsilon a''\left(a\frac{dc''}{dx} + a'\frac{dc''}{dy} + a''\frac{dc''}{dz}\right).$$

Diesen Ausdruck durch ε dividirend, würde man die gesuchte Krümmung v haben. Aber wenn man zur Vereinfachung der Rechnungen die Richtung MN zur Axe der z nimmt, so hat man $a'' = 0$, und der Ausdruck von v wird, indem man durch



α den Winkel bezeichnet, welchen MU mit der neuen Axe der x macht,

$$(4) \qquad v = \frac{dc}{dx} \cos\alpha^2 + \left(\frac{dc}{dy} + \frac{dc'}{dx}\right) \sin\alpha \cos\alpha + \frac{dc'}{dy} \sin\alpha^2 .$$

Diese Formel nun wird uns dieselben Eigenschaften zeigen, welche die Normalschnitte einer Oberfläche darboten. In der That, wenn wir α in $\alpha + \frac{\pi}{2}$ verwandeln, so finden wir für die Krümmung v', welche sich auf die zu NMU senkrechte Ebene bezieht,

$$v' = \frac{dc}{dx} \sin\alpha^2 - \left(\frac{dc}{dy} + \frac{dc'}{dx}\right) \sin\alpha \cos\alpha + \frac{dc'}{dy} \cos\alpha^2 ;$$

daher

$$v + v' = \frac{dc}{dx} + \frac{dc'}{dy} .$$

Die Summe der Krümmungen, welche sich beziehen auf zwei zu einander senkrechte, durch MN gehende Ebenen ist also constant; woraus schon folgt, dass wenn die eine ein Maximum ist, die andere ein Minimum sein wird, und umgekehrt. Aber, da dies weder die Zahl noch die Lage der Ebenen anzeigt, welche sich auf diese Maxima oder Minima beziehen, so suchen wir allgemein die Werthe von α, welche dem v dergleichen Werthe geben. Die gewöhnliche Regel führt zu der Gleichung

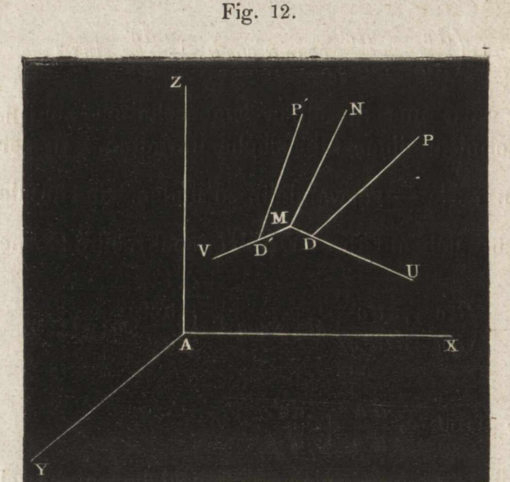
$$\sin 2\alpha \left(\frac{dc}{dx} - \frac{dc'}{dy}\right) = \cos 2\alpha \left(\frac{dc}{dy} + \frac{dc'}{dx}\right) ;$$

woraus hervorgeht, dass die Werthe von α nur zwei zu einander rechtwinklige Richtungen construiren, welche folglich die eine einem Maximum und die andere einem Minimum der Krümmung entsprechen.

Man sieht also, dass die Eigenschaften, welche sich auf die Krümmung der Normalschnitte beziehen, nicht charakteristisch sind für die Flächen; denn sie finden sich wieder für jedes System von Richtungen, welche in jedem Punkt durch beliebige stetige Functionen der Coordinaten bestimmt werden. Diese von Bertrand gemachte Unterscheidung zwischen den Eigenschaften, die allen Systemen zukommen, und denjenigen, welche nur den Normalen einer Reihe von Flächen zukommen, verdient eine besondere Aufmerksamkeit.

269. Wir beschliessen diese Untersuchung mit der Aufsuchung der zu MN senkrechten Richtungen, nach welchen man gehen müsste, damit die unendlich nahen Geraden sich begegneten. Aus dem Vorhergehenden wissen wir, dass es deren nicht zwei rechtwinklige in jedem Punkt geben kann; denn dann würden die vorgelegten Geraden Normalen einer und derselben Fläche sein; aber wir wissen nicht, ob es deren überhaupt giebt, und wie sie liegen werden.

Fig. 12.



Es sei MU eine solche Richtung, dass die Gerade DP des Systems, welche durch den in unendlich kleiner Entfernung ε von M liegenden Punkt D geht, MN trifft, indem man immer die unendlich Kleinen der zweiten Ordnung vernachlässigt.

Es ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass der durch die Formel in Nr. 266 ausgedrückte Winkel ω Null sei. Diese Bedingung wird leichter zu interpretiren sein, wennn man die Gerade MN zur Axe der z nimmt; man hat dann

$$a'' = 0, \quad b'' = 0;$$

und wenn man durch α den Winkel von MU mit der Axe der x bezeichnet, woraus resultirt

$$a = \cos\alpha, \quad a' = \sin\alpha, \quad b = -\sin\alpha, \quad b' = \cos\alpha,$$

so wird die Gleichung, welche das Begegnen von MN mit den unendlich nahen Geraden ausdrückt,

$$\frac{dc}{dy} \sin\alpha^2 + \sin\alpha \cos\alpha \left(\frac{dc}{dx} - \frac{dc'}{dy}\right) - \frac{dc'}{dx} \cos\alpha^2 = 0,$$

oder, indem man durch $\cos\alpha^2$ dividirt,

$$(g) \qquad \frac{dc}{dy} \tang \alpha^2 + \left(\frac{dc}{dx} - \frac{dc'}{dy}\right) \tang \alpha - \frac{dc'}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung vom zweiten Grade zeigt, dass es in jedem Punkt höchstens zwei Richtungen giebt, welche die in Rede stehende Eigenschaft besitzen, wenn man die singulären Punkte ausnimmt, für welche die drei Coëfficienten Null sind, in welchem Falle jeder Werth für α zusagend wäre. Man kann übrigens leicht verificiren, dass diese beiden Richtungen, wenn sie existiren, nicht rechtwinklig sein können in jedem Punkte, wenn die Geraden des Systems nicht Normalen einer und derselben Fläche sind. In der That, da die Bedingung der Integrabilität der Gleichung

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

nicht stattfindet, so hat man im Anfang der Coordinaten nicht

$$\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} = 0, \text{ oder } \frac{dc}{dy} = \frac{dc'}{dx};$$

also ist das Product der Wurzeln der Gleichung (g), welches $-\frac{\frac{dc'}{dx}}{\frac{dc}{dy}}$ ist, nicht gleich -1, und folglich sind die durch die beiden Wurzeln dieser Gleichung gegebenen Richtungen nicht rechtwinklig.

